Correction feuille de révision [2]

I Liban mai 2014

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n$$

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. $u_0 = |z_0| = \left|\sqrt{3} - \mathrm{i}\right| = 2$.
2. $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1+\mathrm{i})z_n| = |1+\mathrm{i}| \times |z_n| = \sqrt{2}|z_n| = \sqrt{2}u_n$
3. D'après le cours, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n$; (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = 2$.
4. (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2} > 1$ et de premier terme strictement positif, elle diverge donc vers $+\infty$.
5.

Variables	:	u est un réel
		p est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	Tant que $u \leqslant p$ Faire
		Affecter à n la valeur $n+1$
		Affecter à u la valeur $\sqrt{2} \times u$
		Fin du Tant Que
Sortie	:	Afficher n

Partie B

1. $z_1 = (1+\mathrm{i}) \times (\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)$.
2. $z_0 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$

   $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

   $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$.
3. Des deux questions précédentes, on obtient que

$$1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

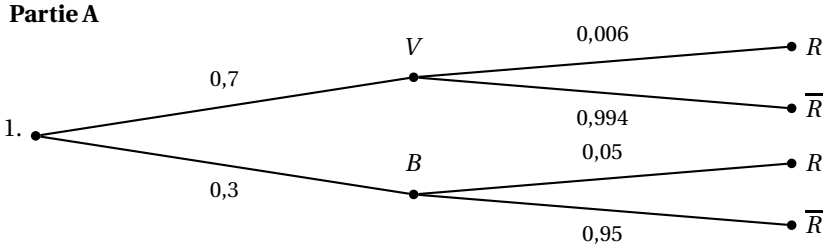
   D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

II Liban mai 2014

Partie A

1.



2. D'après l'arbre ci-dessus $p(V \cap R) = 0{,}7 \times 0{,}006 = 0{,}0042$.

3. D'après l'arbre ci-dessus, la probabilité de l'évènement R est

$$p(R) = p(V \cap R) + p(B \cap R) = 0{,}0042 + 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}0192$$

4. On cherche à déterminer $p_R(B)$:

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}05}{0{,}0192} = 0{,}78125$$

Partie B : le vélo

1. Cela revient à calculer $p(15 \leqslant T \leqslant 20)$. À la calculatrice, nous obtenons, $p(15 \leqslant T \leqslant 20) = 0{,}946$

2. Il sera en retard au lycée si il met plus de 20 minutes pour effectuer le trajet. On cherche donc la probabilité de l'évènement « $T \geqslant 20$ ». À la calculatrice, nous obtenons

$$p(T \geqslant 20) = 0{,}0062$$

3. On cherche la durée maximale de son temps de parcours T_0 (en minutes) tel que $p(T \leqslant T_0) = 0{,}9$. À la calculatrice, nous obtenons

$$p(T \leqslant 18{,}5379) = 0{,}9$$

Ce qui signifie qu'il a une probabilité de 0,9 de mettre moins de 18 minutes et 30 secondes (environ). Il peut donc partir au plus tard à 8 heures moins 18 minutes et 30 secondes, soit à 7 h 41 minutes et 30 secondes. À une minute près, il peut partir au maximum à 7 h 41, de sorte à avoir une probabilité d'arriver à l'heure de 0,9

Partie C : le bus

1. D'après le cours Z' suit une loi normale centrée-réduite.

2. Puisque $p\left(T' \geqslant 20\right) = 0{,}05$, il vient

$$p\left(\frac{T'-15}{\sigma'} \geqslant \frac{20-15}{\sigma'}\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow p\left(Z' \geqslant \frac{5}{\sigma'}\right) = 0{,}05$$

À la calculatrice, en considérant une loi normale centrée-réduite Z', on trouve que

$$p\left(Z' \geqslant 1{,}6449\right) = 0{,}05$$

D'où

$$\frac{5}{\sigma'} = 1{,}6449$$

et donc

$$\sigma' = \frac{5}{1{,}6449} = 3{,}04 \quad \text{à} \quad 0{,}01 \quad \text{près}$$

III Amérique du Nord mai 2014

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc **sécantes** ; on appelle L leur point d'intersection.
2. (a) Les droites (LN), (BF) et (CG) sont **coplanaires** dans le plan (BCG) d'où les constructions de T et Q.

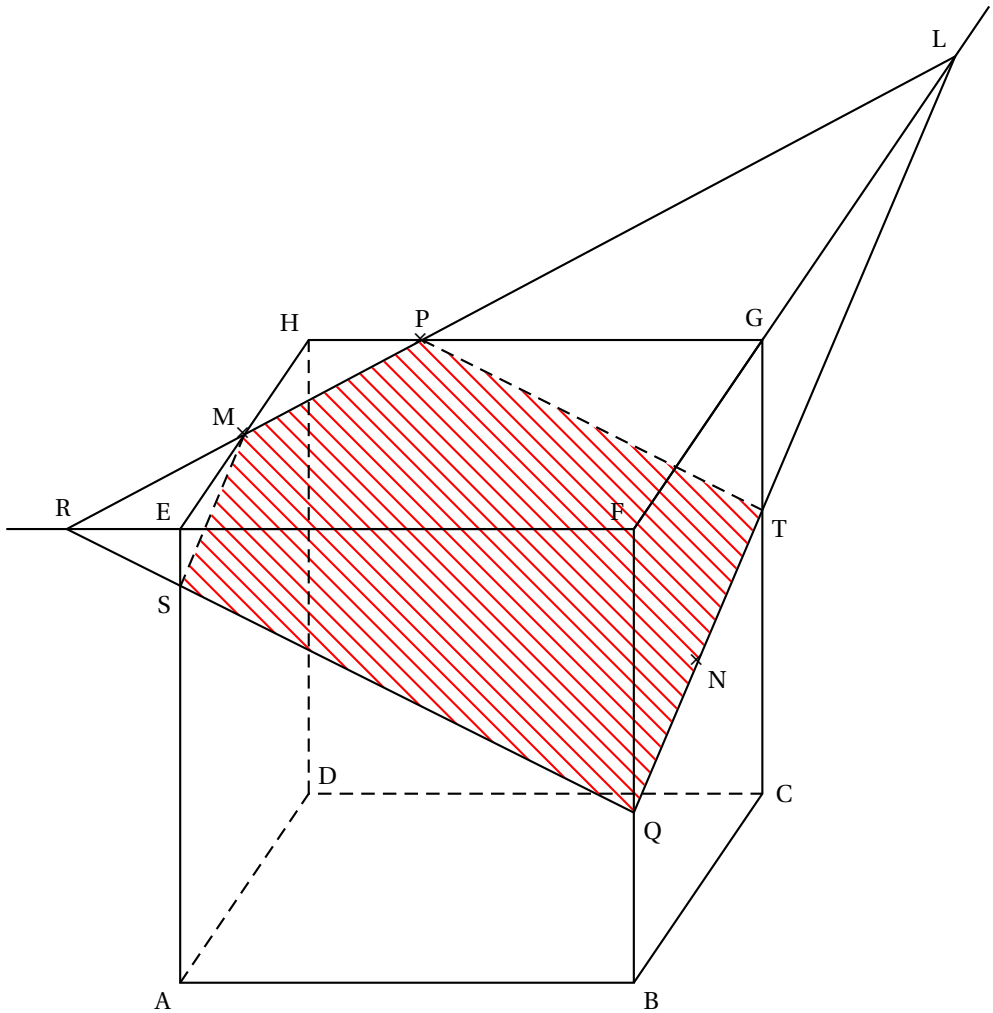
   (b) On cherche l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} L \in (MP) \Longrightarrow L \in (MNP) \\ N \in (MNP) \end{array}\right\} \Longrightarrow (LN) \subset (MNP) \\ Q \in (LN) \end{array}\right\} \Longrightarrow Q \in (MNP) \\ Q \in [BF] \Longrightarrow Q \in (ABF) \end{array}\right\} \Longrightarrow Q \in (MNP) \cap (ABF)$$

   Les droites (MP) et (EF) du plan (EFG) ne sont pas parallèles, donc elles sont **sécantes** ; on appelle R leur point d'intersection.

$$\left.\begin{array}{r} R \in (MP) \Longrightarrow R \in (MNP) \\ R \in (EF) \Longrightarrow R \in (ABF) \end{array}\right\} \Longrightarrow R \in (MNP) \cap (ABF)$$

   Les plans (MNP) et (ABF) ont deux points en commun, Q et R ; ils ne sont pas confondus car $P \in (MNP)$ et $P \notin (ABF)$. Ces deux plans sont donc sécants et comme Q et R appartiennent aux deux plans, l'intersection des deux plans (MNP) et (ABF) est la droite $\boxed{(QR)}$.



3. Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR).
   La section du cube par le plan (MNP) est le pentagone $MPTQS$.

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On a $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$, $G(1\,;\,1\,;\,1)$ et $H(0\,;\,1\,;\,1)$.

1. M est le milieu du segment $[EH]$ donc M a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+0}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{1+1}{2}\right)=\boxed{\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)}$;

   N est le milieu du segment $[FC]$ donc n a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+1}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{1+0}{2}\right)=\boxed{\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)}$;

   $P(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifie $\overrightarrow{HP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{HG}$, on a donc : $\begin{cases} x-0=\dfrac{1}{4} \\ y-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ Donc $P\left(\dfrac{1}{4}\,;1\,;1\right)$.

2. Pour calculer les coordonnées du point L, on écrit les systèmes de représentations paramétriques des droites (MP) et (FG).

   (MP) passe par $M\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MP}\left(\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$.

   Une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}k \\ y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}k \\ z=1 \end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$

   (FG) passe par $F(1\,;\,0\,;\,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{FG}(0\,;\,1\,;\,0)$.

   Une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\begin{cases} x=1 \\ y=k' \\ z=1 \end{cases}$ où $k'\in\mathbb{R}$

On détermine l'intersection de ces deux droites :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}k = 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k = k' \\ 1 = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} k = 4 \\ k' = \frac{5}{2} \end{array}\right.$$

Donc le point L a pour coordonnées $\boxed{\left(1\,;\,\frac{5}{2}\,;\,1\right)}$.

3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\frac{5}{8}\right)$.

   On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{TP}.\overrightarrow{TN}$

$$\overrightarrow{TP}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}.\overrightarrow{TN}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\times 0 + 0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{8}\times\left(-\frac{1}{8}\right) \neq 0$$

   Le triangle TPN n'est **pas** rectangle en T.

IV Polynésie juin 2014

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ

   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

   (a) Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

   (b) Justifier que, pour tout réel x, $h(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right)$.

   En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

   (c) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

   (d) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

   (e) En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

   (f) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ ?
3. Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

   (a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

   (b) Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.