Suites arithmétiques et géométriques

Table des matières

I Suites 1
II Suites arithmétiques 2
III Suites géométriques 3

Activité 1

Partie 1

1. $u_0 = 38\,400$; $u_1 = u_0 - 400 = 38\,000$; $u_2 = u_1 - 400 = 37\,600$; $u_3 = u_2 - 400 = 37\,200$.
   Plus généralement : $u_{n+1} = u_n - 400$.
   On a une suite arithmétique, de raison $r = -400$ et de premier terme $u_0 = 38\,400$.
2. Pour tout n, $u_n = 38\,400 - 400n$.
3. $u_6 = 38\,400 - 6 \times 400 = 36\,000$.
   La production après 6 mois est de 36 000 unités. (production du mois de juillet 2006).
4. $u_n = 19\,200$ s'écrit : $38\,400 - 400n = 19\,200$.
   On trouve $n = 48$.
   Ce sera la production quatre ans après, donc en janvier 2010.

Partie 2

Mois	Production mensuelle en unités	Cumul à partir de juillet 2006
Juillet 2006	$u_6 = 36\,000$	$u_6 = 36\,000$
Août 2006	$u_7 = 35\,600$	$u_6 + u_7 = 71\,600$
Septembre 2006	$u_8 = 35\,200$	$u_6 + u_7 + u_8 = 106\,800$
octobre 2006	$u_9 = 34\,800$	$u_6 + u_7 + u_8 + u_9 = 141\,600$
Novembre 2006	$u_{10} = 34\,400$	$u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = 176\,000$
Décembre 2006	$u_{11} = 34\,000$	$u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} = 200\,000$

Partie 3

1. Mars 2007 correspond à $n = 14$.
   $u_{14} = 38\,400 - 14 \times 400 = 32\,800$ unités.
2. $u_n = 0$ donne $38\,400 - 400n = 0$ soit $n = \dfrac{38\,400}{400} = 96$.
   La production aura cessé dans 8 ans, soit en janvier 2014.

I Suites

Définition et notation

Une suite (numérique) est une suite illimitée de termes.
Si la suite s'appelle u, les termes se notent $u(0)$, $u(1)$, …, $u(n)$, etc. ou encore, avec une notation indicielle u_0, u_1, u_2, etc.
Le terme général est alors u_n et l'ensemble des termes de la suite se note (u_n).

II Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre r, appelé raison de la suite, tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$.
La différence entre deux termes consécutifs est constante.

Exemples : la suite des entiers naturels, la suite des entiers naturels pairs, la hauteur gravie en montant un escalier.

Remarque : on a :
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$
$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$.
On en déduit la propriété suivante :

Propriété

Pour tout n, $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$ pour $p \geqslant n$

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique.
Soit S la somme de termes consécutifs ; alors : $S = \text{nombre de termes} \times \dfrac{\text{Premier terme de } S + \text{dernier terme de } S}{2}$.

Alors :$S_n = u_0 = u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{(n+1)\left(u_0 + u_n\right)}{2}$ (il y a n+1 termes)

Si $S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$, $S = (n-p+1) \times \dfrac{u_p + u_n}{2}$

Explication :
On écrit S de deux façons différentes, une fois en commençant par le premier terme, uns fois en commençant par le dernier terme. $S = u_p + \left(u_p + r\right) + \left(u_p + 2r\right) + \cdots + \left(u_p + (n-p-1)r\right) + \left(u_p + (n-p)r\right)$.
$S = u_n + (u_n - r) + (u) + (u_n + 2r) + \cdots + \left(u_n - (n+p-1)r\right) + \left(u_n - (n+p)r\right)$.
En additionnant terme à terme, on voit qu'on obtient toujours la même somme : $u_p + u_n$.
Par conséquent : $2S = \text{nombre de termes} \times \left(u_p + u_n\right)$ donc $S = (n-p+1) \times \dfrac{u_p + u_n}{2}$.

Exemples :

- $S = 1+2+3+\cdots+n$; c'est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique, de raison $r = 1$. On obtient $S = n \times \dfrac{1+n}{2}$ donc $\boxed{S = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.
- Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = 0,2$ et de premier terme $u_0 = 3$.
  Soit $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{15}$.
  Alors : $S = 13\dfrac{u_3 + u_{15}}{2}$ avec $u_3 = u_0 + 3r = 3 + 3 \times 0,2 = 3,6$ et $u_{15} = u_0 + 15r = 3 + 15 \times 0,2 = 6$.
  Par conséquent : $S = 13 \times \dfrac{3,6+6}{2} = \dfrac{13 \times 9,6}{2} = 62,4$.

Exercices page 43

Activité 2 page 31 (suites géométriques)

Partie 1 : Les taux sont de 20 %. **Partie 2 :**

1. On pose $v_1 = 150$.
   On obtient : $v_2 = 180$; $v_3 = 216$; $v_4 = 259,2$.
   Pour tout $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 1,2v_n$.
   Le premier terme est $v_1 = 150$ et la raison $b = 1,2$.
2. On a $v_n = v_1 \times b^{n-1}$ donc $v_n = 150 \times 1,2^{n-1}$.
3. $v_6 = 150 \times 1,2^6 \approx 373$.
   Le nombre de livres vendus la sixième semaine sera environ de 373.

Partie 3 :

Semaine	Nombre de livres vendus	Cumul
Semaine 1	$v_1 = 150$	$v_1 = 150$
Semaine 2	$v_2 = 180$	$v_1 + v_2 = 330$
Semaine 3	$v_3 = 216$	$v_1 + v_2 + v_3 = 546$
Semaine 4	$v_4 = 259,2$	$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 805,2$
Semaine 5	$v_5 = 311,04$	$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 1116,24$
Semaine 6	$v_6 = 373,248$	$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 = 1489,488$

$v_1 \times \dfrac{b^3 - 1}{b-1} = 150 \times \dfrac{1,2^3 - 1}{1,2-1} = 546$ donc $v_1 \times \dfrac{b^3-1}{b-1} = v_1 + v_2 + v_3$.

De même, $v_1 + \cdots + v_6 = v_1\dfrac{b^6 - 1}{b-1}$

Partie 4 :

1. La 15^e^semaine correspond à $n = 15$. $v_{15} = v_1 \times b^{n-1} = 150 \times 1,2^{14} \approx 1926$.
2. $v_{n+1} - v_n = 150 \times 1,2^n - 150 \times 1,2^{n-1} = 150 \times 1,2^{n-1}(1,2-1) > 0$ donc la suite (v_n) est croissante.
3. $v_{17} \approx 2773,263883$; $v_{18} \approx 3327,91666$.
   Comme la suite est croissante, c'est à partir de la dix-huitième semaine que la vente dépasse 3000 exemplaires hebdomadaires vendus.

III Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un nombre q, appelé raison de la suite, tel que, pour tout n, $u_{n+1} = q \times u_n$. Chaque terme est obtenu à partir du précédent en multipliant toujours par le même nombre.

Exemple :

Monsieur Durand place une somme de 1 000 € à un taux d'intérêts composés de 4 %.
On note C_0 le capital initial et C_n le capital au bout de n années.

Pour tout n, on a : $C_{n+1} = C_n \times \left(1 + \dfrac{4}{100}\right) = 1,04C_n$ donc (C_n) est une suite géométrique, de premier terme $C_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1,04$.

Propriété : Terme général

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
$u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p q^{n-p}$ pour tout p.

Justification :

On a :
$u_1 = u_0 \times q$
$u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2$
$u_3 = u_2 \times q = (u_0 \times q^2) \times q = u_0 \times q^3$ $u_4 = u_3 \times q = (u_0 \times q^3) \times q = u_0 \times q^4$
$\dots$
$u_n = u_0 \times q^n$.

$u_n = u_0 q^n$ et $u_p = u_0 q^p$; par division, on trouve $\dfrac{u_n}{u_p}\dfrac{u_0 q^n}{u_0 q^p} = q^{n-p}$ d'où $u_n = u_p q^{n-p}$

Exercices

Propriété : Somme de termes consécutifs

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Soit $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$.

Alors : $S = \text{Premier terme de la somme} \times \dfrac{q^{\text{nombre de termes de la somme}} - 1}{q - 1}$.

Autrement dit : $S = u_p \times \dfrac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}$ qu'on peut aussi écrire $S = u_p \times \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

Exemples :

$S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{23} = u_5 \times \dfrac{q^{19} - 1}{q - 1}$ car la somme comprend 19 termes.

Exercices :