

Exercices de bac-graphes probabilistes-feuille 2

I

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».

Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,

- 60% des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10% des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.

On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n ,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n , où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.

On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle : $(f_{n+1} \quad g_{n+1}) = (f_n \quad g_n) \times A$ où A désigne la matrice : $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$
3. Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Montrer que, pour tout entier naturel n , $f_{n+1} = 0,5f_n + 0,1$.
6. On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = f_n - 0,2$.
 - (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.
 - (d) Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

II

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n -ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n -ième jour.

On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1^{er} jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1.
 - (a) Traduire les données par un graphe probabiliste.
 - (b) Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
 - (c) Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $u_n = a_n - \frac{8}{9}$.
 - (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
 - (b) Exprimer u_n puis a_n en fonction de n .
4.
 - (a) Déterminer en justifiant la limite de (a_n) .
 - (b) Interpréter ce résultat.

III

Dans la commune de Girouette, deux partis s'affrontent aux élections tous les ans. En 2010, le parti Hiron-delle l'a emporté avec 70% des voix contre 30% au parti Phénix.

On admet qu'à partir de l'année 2010 :

- 14% des électeurs votant pour le parti Hiron-delle à une élection voteront pour le parti Phénix à l'élec-tion suivante;
- 6% des électeurs votant pour le parti Phénix à une élection voteront pour le parti Hiron-delle à l'élection suivante;
- Les autres ne changent pas d'avis.

On considère un électeur de Girouette choisi au hasard. On note H l'état « L'électeur vote pour le parti Hiron-delle » et P l'état « L'électeur vote pour le parti Phénix ».

1. (a) Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.
(b) Déterminer la matrice de transition M en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
2. On appelle $E_n = \begin{pmatrix} h_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste de l'année 2010 + n .
On a donc $E_0 = (0,7 \quad 0,3)$.
Déterminer E_1 et E_4 . (On arrondira les coefficients de E_4 au centième). Interpréter les résultats.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $h_{n+1} = 0,8h_n + 0,06$.
(b) On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n , $u_n = h_n - 0,3$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
(c) Montrer que pour tout entier naturel n , $h_n = 0,3 + 0,4 \times 0,8^n$.
4. à partir de combien d'années la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hiron-delle sera-t-elle strictement inférieure à 0,32?

IV

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts.

On suppose que l'effectif de cette population est stable.

Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.

30% des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.

L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.

Au bout d'une semaine, une enquête indique que :

- 20% des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.
- 10% des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.

L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1. Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Soit $X_0 = (0,3 \quad 0,7)$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.
 - (a) Donner la matrice de transition (notée A) associée au graphe précédent.
 - (b) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de cam-pagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.
3. (a) Vérifier que $A = N + 0,7R$, où $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$
 - (b) Calculer N^2 , R^2 , NR et RN puis en déduire A^n , pour n entier naturel.
 - (c) L'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70%? Justifier.