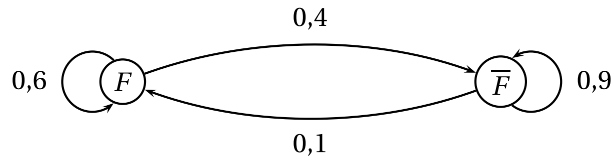
Correction des exercices I et II de bac-graphes probabilistes-feuille 2

I Centres étrangers, juin 2005

1.



Au rang $n+1$, les fumeurs viennent des 60 % de fumeurs de l'année n et de 10 % des non-fumeurs de l'année n, soit :
$f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1g_n$.
De même les non-fumeurs viennent des 40 % de fumeurs de l'année n et de 90 % des non-fumeurs de l'année n, soit :
$g_{n+1} = 0,4f_n + 0,9g_n$. Ce qui se traduit matriciellement par :

$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times A$ où $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}}$

3. Notons $P_n = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix}$.
On a $P_2 = P_0M^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,275 & 0,725 \end{pmatrix}$. On en déduit $\boxed{f_2 = 0,275}$ et $\boxed{g_2 = 0,725}$.
À la génération de rang 2, le pourcentage de fumeurs est 27,5 %

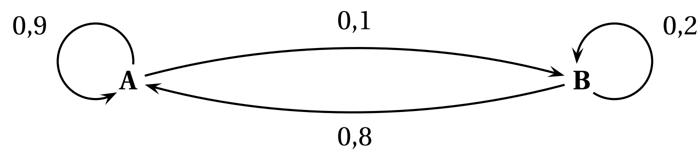
4. La matrice de transition étant non nulle, il existe donc un état stable
$P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ (avec $x+y=1$) tel que :
$P = P \times M \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \iff$
$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0,6x + 0,1y \\ y & = & 0,4x + 0,9y \end{array} \right.$.
On a donc $\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 0,6x + 0,1y \\ x+y & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 0,6x + 0,1y \\ y & = & 1-x \end{array} \right. \iff$
$\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 0,6x + 0,1(1-x) \\ y & = & 1-x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 0,6x + 0,1 - 0,1x \\ y & = & 1-x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} 0,5x & = & 0,1 \\ y & = & 1-x \end{array} \right. \iff$
$\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 0,2 \\ y & = & 1-x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 0,2 \\ y & = & 0,8 \end{array} \right.$ Donc $\boxed{P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}}$.
À terme il y aura donc 20 % de fumeurs.

5. On a pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1g_n$; or $g_n = 1 - f_n$, donc :
$f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1(1-f_n) = 0,6f_n + 0,1 - 0,1f_n = \boxed{0,5f_n + 0,1}$.

6. (a) On a pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f_{n+1} - 0,2 = 0,5f_n + 0,1 - 0,2 = 0,5f_n - 0,1 = 0,5(f_n - 0,2) = \boxed{0,5u_n}$.
L'égalité vraie pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,5u_n$ montre que la suite (u_n) est une suite **géométrique** de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_0 = f_0 - 0,2 = 0,5 - 0,2 = 0,3$.
(b) On sait que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 0,3 \times 0,5^n$.
(c) On a $u_n = f_n - 0,2 \iff f_n = u_n + 0,2 = \boxed{0,3 \times 0,5^n + 0,2}$.
(d) Comme $0 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3 \times 0,5^n = 0$ et enfin
$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = \boxed{0,2}$.
On retrouve le fait qu'à terme le nombre de fumeurs va tendre vers les 20 %.

II Amérique du nord – 2013

1. (a) Appelons A l'état probabiliste « Léa s'est connectée », B l'état probabiliste « Léa ne s'est pas connectée ». On considère que :
Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9 d'où $p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,9$ et $p_{A_n}(B_{n+1}) = 0,1$.
Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8 soit $p_{B_n}(A_{n+1}) = 0,8$ et $p_{B_n}(B_{n+1}) = 0,2$.
On en déduit le graphe probabiliste correspondant à cette situation :



(b) La matrice de transition M de ce graphe vérifiant $(a_{n+1}\ b_{n+1}) = (a_n\ b_n) \times M$ est : $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,1 \\ 0,80 & 0,20 \end{pmatrix}}$.

(c) Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée donc l'état initial est $P_1 = (0\ 1)$.
L'état P_3 au jour 3 est :
$$P_3 = P_1 \times M^2 = (0\ 1) \times \begin{pmatrix} 0,90 & 0,1 \\ 0,80 & 0,2 \end{pmatrix}^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \end{pmatrix}}.$$
La probabilité que Léa se connecte le troisième jour est égale à $\boxed{0,88}$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0,9a_n + 0,8b_n & 0,1a_n + 0,2b_n \end{pmatrix}}.$$
D'où $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,8b_n$ avec pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n + b_n = 1$. D'où $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,8 \times (1 - a_n)$ $= 0,1a_n + 0,8$.
Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \boxed{0,1a_n + 0,8}$.

3. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{8}{9} \iff u_{n+1} = 0,1a_n + 0,8 - \frac{8}{9} u_{n+1} = 0,1a_n - \frac{4}{45} \iff u_{n+1} = 0,1 \times \left(a_n - \frac{8}{9}\right) u_{n+1} = \boxed{0,1u_n}.$$
Donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n$ donc (u_n) est une suite **géométrique** de raison 0,1. Mais $u_1 = a_1 - \frac{8}{9}$, soit $u_1 = -\frac{8}{9}$.
(u_n) est une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $u_1 = -\frac{8}{9}$.

(b) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,1$ et de premier terme $u_1 = -\frac{8}{9}$ alors, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$, soit $\boxed{u_n = -\frac{8}{9} \times 0,1^{n-1}}$.
attention, on commence à u_1 !
Or pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = a_n - \frac{8}{9} \iff a_n = u_n + \frac{8}{9} \iff a_n = -\frac{8}{9} \times 0,1^{n-1} + \frac{8}{9}$
$\iff a_n = -\frac{8}{9} \times 0,1^n + \frac{8}{9}$. Ainsi pour tout entier $n \geqslant 1$, $\boxed{a_n = -\frac{80}{9} \times 0,1^n + \frac{8}{9}}$.

4. (a) Comme $0 < 0,1 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,1^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{80}{9} \times 0,1^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{80}{9} \times 0,1^n + \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$. Soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{8}{9}}$.

Conclusion : la suite (a_n) converge vers $\boxed{\frac{8}{9}}$.

(b) La suite (a_n) convergeant vers $\frac{8}{9}$, à partir d'un certain nombre de jours, la probabilité que Léa se connecte chaque jour est égale à $\frac{8}{9}$.