Feuille d'exercices sur les suites géométriques

I

Soit $q \neq 0$. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = aq^n$, a nombre quelconque.
Montrer que cette suite est géométrique.

II

Parmi les suites (u_n) ci-dessous, quelles sont celles qui correspondent à une suite géométrique ?

a) $u_n = -5 \times 3^n$

b) $u_n = \sqrt{n}$

c) $u_n = 5 \times 2^n + 7$

d) $u_n = 5^{2n+3}$

III

Le 1^er^janvier 2008, Jean a placé une somme de 5 000 € sur un livret. On suppose que ce livret est rémunéré à un taux d'intérêts composés de 4 %.
On note u_0 le capital (en euros) de départ ($u_0 = 5\,000$) et u_n le capital acquis après n années.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
3. En déduire la nature de la suite (u_n).
4. Combien aura-t-il au bout de 10 ans ?
5. Quelles sont les variations de cette suite ?
6. À l'aide de la calculatrice, trouver au bout de combien d'années il aura doublé son capital.

IV

Au 1^er^janvier 2008, une ville A comptait 200 000 habitants et une ville B en avait 150 000.
On prévoit pour cette année 2008 et les années suivantes une diminution annuelle de la population de 3 % pour la ville A et une augmentation annuelle de 5 % pour la ville B.

1. Quelles seront les populations des villes A et B le 1^er^janvier 2009 et 2010 ?
2. Pour tout entier n, on appelle a_n et b_n les populations respectives des villes A et B le 1^er^janvier de l'année $(2008 + n)$.
   Vérifier que ces deux suites sont géométriques et donner leurs raisons.
3. Déterminer le terme général de a_n et de b_n en fonction de n.
4. À l'aide de la calculatrice, donner l'année à partir de laquelle la population de la ville B dépassera celle de la ville A.

V

M. Dupont désire acheter une automobile qui, au 1^er^juillet 2008, coûte 9 000 €. N'ayant à sa disposition que 7 700 € et ne voulant pas prendre de crédit, il décide de placer cette somme. Un organisme financier lui assure un placement, (à intérêts composés, au taux annuel de 7 %.
On se propose de calculer en quelle année M. Dupont pourra acheter la voiture dont il rêve.
Pour tout entier n, on note u_n le capital dont dispose M. Dupont au 1^er^juillet de l'année $(2008 + n)$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n), avec $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   Exprimer u_n en fonction de n.
3. Le prix de l'automobile que veut acheter M. Dupont augmente régulièrement de 3 % au 1^er^juillet de chaque année.
   Pour tout entier n, on note v_n le prix de l'automobile au 1^er^juillet de l'année $(2008 + n)$.
   Exprimer v_n en fonction de n.
4. Déterminer à partir de quelle année M. Dupont pourra acheter cette voiture.

VI

Un jardinier amateur tond sa pelouse tous les samedis, et recueille à chaque fois 120 litres de gazon coupé qu'il stocke dans un bac à compost de 300 litres.
Chaque semaine, les matières stockées perdent par décomposition, ou prélèvement, les trois quarts de leur volume.
On appelle v_n le volume en litres stocké le n-ième samedi de tonte.
Vérifier que l'on a : $v_1 = 120$, $v_2 = 150$ et $v_3 = 157,5$.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

1. Cette suite est-elle arithmétique ou géométrique ?
2. On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre t_n par $t_n = 160 - v_n$.
   Démontrer que la suite (t_n) est géométrique, et préciser son premier terme et sa raison.
3. Exprimer t_n en fonction de n et en déduire le terme général de la suite (v_n).
4. Les conditions restant les mêmes, le bac de stockage sera-t-il un jour rempli ?