Suites numériques

Sommaire :

I Activité n° 2 page 295
II Généralités sur les suites numériques
III Variations et bornes
IV Suites arithmétiques
V Suites géométriques
VI Suites convergentes
VII Représentation graphique des termes d'une suite

Activité n° 2 page 295

1. (a) $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{2}$.
   On obtient successivement : $u_1 = 8$; $u_2 = 7$; $u_3 = 6,5$; $u_4 = 6,25$; $u_5 = 6,125$; $u_6 = 6,0625$

   (b) $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + (n+1)$.
   Les termes sont : 2 ; 4 ; 7 ; 11 ; 16 ; 22 ; 28

   (c) $u_0 = 3$; $u_1 = 33$; $u_2 = 8$; $u_3 = 28$; $u_4 = 13$; $u_5 = 23$; $u_6 = 18$

   (d) $u_0 = 100$; $u_1 = 200$. On a : $u_{n+2} = 0,8u_{n+1} + 0,2u_n$.
   On obtient : $u_2 = 180$; $u_3 = 184$; $u_4 = 183,2$; $u_5 = 183,36$; $u_6 = 183,328$

2. (a) 38 ; 29 ; 20 ; 11 ; **2**
   $u_0 = 38$ et $u_{n+1} = u_n - 9$

   (b) 0 ; 5 ; 3 ; 8 ; 6 ; 11 ; **9** ; 14 ; 12.
   $u_0 = 0$; $u_1 = 5$; les termes de rang pair sont égaux au terme précédent moins 2 et ceux de rang impair sont égaux au terme précédent plus 5.
   $u_{2n} = u_{2n-1} - 2$ et $u_{2n+1} = u_{2n} + 5$.

   (c) Les termes sont 11 ; 33 ; **55** ; 77 ; 99 ; **121**.
   $u_n = 11(2n+1)$

   (d) Les termes sont : 1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 17 ; 51 ; 53 ; **159**
   $u_0 = 1$; $u_1 = 3$ et pour tout n pair, $u_n = u_{n-1} + 2$ et pour tout n impair, $u_n = 3u_n$

   (e) Les termes sont : 2 ; 3 ; 6 ; 11 ; 18 ; 27 ; 38 (on ajoute successivement 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11).
   $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$

   (f) 0 ; 3 ; 9 ; 21 ; 45 ; 93 ; **189**
   $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 3 \times 2^(n-1)$

Définition naïve :
Une suite numérique est une suite, illimitée de nombres.
Exemples :

- 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 $\cdots$; (suite des entiers naturels)
- 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 $\cdots$ (suite des entiers pairs)
- 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 $\cdots$ (suite des puissances de 2)
- 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144 (suite de Fibonacci)

I Généralités sur les suites numériques

1) Définition

Considérons par exemple la suite des nombres 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 $\cdots$. Il faut pouvoir donner un nom à chacun des termes de cette suite.
On donne un nom général à la suite, par exemple u et chaque terme est repéré par $u(0)$, (1), $u(2)$, ...

Définition :

Une suite numérique u est une fonction numérique, définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{array}$$

Notation : Le terme général $u(n)$ se note u_n.
L'ensemble des termes de la suite se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Attention à ne pas confondre les deux notations :

- u_n est le terme de rang n.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des termes de la suite.

Nous allons voir qu'il y a deux façons de définir une suite :

2) Définition explicite

Une suite est définie de façon explicite lorsque le terme général u_n est exprimé en fonction de n.

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = 3n^2 + 5n + 1$; on peut directement calculer le terme de n'importe quel rang, par exemple : $u_{100} = 30501$

3) Définition par récurrence :

Une suite (u_n) est définie par récurrence lorsque chaque terme est défini en fonction du terme précédent ou des termes précédents, et par la donnée du ou des premiers termes.
Exemples :

- suite des entiers naturels :
  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$.
- Suite de Fibonacci :
  $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$
  Calculer les trois premiers termes.
  Est-il facile de calculer le terme u_{25} ? u_{100} ?

On essaye de trouver une définition explicite, mais ce n'est pas toujours facile.

II Variations et bornes

Définitions :

a) **Suite croissante :** Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante si, et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

b) **Suite décroissante :** Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante si, et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

c) **Suite constante :** Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est constante si, et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

d) **Suite monotone** Une suite est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

e) **Suite majorée :** Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée s'il existe un nombre M tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant M$.

f) **Suite minorée :** Une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est minorée s'il existe un nombre m tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant m$.

g) **Suite bornée :** Une suite est bornée si elle est majorée et minorée.

Exemples :

1. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 3 - \dfrac{1}{n}$ (n>0).
   Pour tout $n > 0$, $\dfrac{1}{n} > 0$ donc $-\dfrac{1}{n} < 0$ donc $3 - \dfrac{1}{n} < 3$: la suite (u_n) est majorée par 3.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = n^2$ pour tout n ; il est clair que $u_n \geqslant 0$ pour tout n, donc (u_n) est minorée par 0.
3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 2n+3$.
   - Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = [2(n+1)+3] - [2n+3] = 2 > 0$ donc $u_{n+1} < u_n$: cette suite est croissante.
   - Comme cette suite est croissante, elle est minorée (par son premier terme).
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{5n-1}{n+2}$.
   - $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{5x-1}{x+2}$;
     Montrer que $f(x) = 5 - \dfrac{11}{x+2}$.
     On montre alors que f est croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$; on en déduit que $f(n) < f(n+1)$ donc la suite associée est croissante.
   - (u_n) est majorée par 5.

Comment étudier les variations d'une suite ?

On compare u_n et u_{n+1} en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n.
Exemple : étudier les variations de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

On va maintenant étudier deux types de suites simples, que l'on rencontre souvent :

III Suites arithmétiques

1) Définition

Soit (u_n) une suite. S'il existe un réel r tel que, pour tout n, $u_{n+1=u_n} + r$, la suite (u_n) est appelée suite arithmétique, de raison r.
On l'appelle suite arithmétique, car chaque terme est la moyenne arithmétique (moyenne usuelle) du terme précédent et du terme suivant.

2) Expression explicite

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout n, on a : $u_n = u_0 + nr$.
Plus généralement : pour tout p : $u_n = u_p + (n-p)r$.

3) Variations d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

- Si $r < 0$ la suite est décroissante.
- Si $r = 0$, la suite est constante.
- Si $r > 0$, la suite est croissante

Démonstration « évidente »

4) Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
On définit : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i$.
Alors $\boxed{S_n = (n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}}$.
Remarque : $(n+1)$ est le nombre de termes, u_0 est le premier terme et u_n est le dernier terme.

Démonstration

- Soient n et p deux entiers avec $p \leqslant n$; alors $u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$
  En effet : $u_p = u_0 + pr$ et $u_{n-p} = u_0 + (n-p)r$ donc $u_p + u_{n-p} = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n$.
- On écrit S_n de deux façons, une fois à l'endroit et une fois à l'envers et on somme terme à terme :
  $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$
  $S_n = u_n u_0 + u_{n-1} + \cdots + u_1 + u_0$
  Alors : $2S_n = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \cdots + (u_n + u_0) = (n+1)(u_0 + u_n)$ car chaque somme est égale à $u_0 + u_n$

Propriété :

Notons $\Sigma_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=0}^{n} i$
Alors : $\Sigma_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Il suffit d'appliquer le résultat précédent ou la méthode précédente.

On a alors un autre moyen de calculer la somme des termes d'une suite arithmétique :
on trouve : $\boxed{S_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r}$.

IV Suites géométriques

1) Définition :

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout n, $u_{n+1} = qu_n$. q est appelé la raison de la suite.

Exemple : Soit $u_n = 2^n$; $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2u_n$ pour tout n donc la suite (u_n) est géométrique de raison 2.

2) Formulation explicite

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tout n, on a : $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$.
Plus généralement : pour tout $p \leqslant n$, $\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}$.

$u_1 = qu_0$
$u_2 = qu_1 = q\left(u_0 \times q\right) = u_0 \times q^2$
$u_3 = qu_2 = q \times u_0 \times q^2 = u_0 \times q^3$
On peut imaginer que cela se poursuit ainsi.

3) Variations

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Si $q > 1$, la suite (u_n) est croissante si $u_0 > 0$ et décroissante si $u_0 < 0$.
Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est décroissante si $u_0 > 0$ et croissante si $u_0 < 0$.
Si $q < 0$, la suite (u_n) n'est pas monotone.

Démonstration :
Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n \left(q-1\right)$.
Si $q > 1$, $u_0 q^n \left(q-1\right)$ est du signe de u_0.
Si $0 < q < 1$, $q - 1 < 0$ donc $u_0 q^n \left(q-1\right)$ est du signe opposé à u_0.
Si $q = 1$, la suite est constante, de même que si $q = 0$.

4) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété :
Soit $q \neq 1$. $\boxed{s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.

Démonstration :
On a :
$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n$
$qs_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$
Alors : $s_n - qs_n = 1 - q^{n+1}$ donc $(1-q)s_n = 1 - q^{n+1}$. D'où : $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ que l'on peut aussi écrire $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

- Si $q = 1$: $S_n = (n+1)u_0$
- Si $q \neq 1$, $S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration :

- Si $q = 1$, tous les termes sont égaux à u_0 donc $S_n = (n+1)u_0$, $n+1$ étant le nombre de termes.
- $q \neq 1$; $S_n = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^n = u_0\left(1 + q1 + q^2 + \cdots + q^n\right) = u_0 s_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

5) Exercices

V Suites convergentes

1)

Définition Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n)admet pour limite le réel ℓ si tout intervalle ouvert $]a\,;\,b[$ contenant ℓ contient **tous** les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que la suite est convergente.

Exemple : $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$ avec x réel, donc les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de 0 ; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) Limite infinie d'une suite

Définition :

- La suite (u_n) admet comme limite $+\infty$ si tout intervalle du type $]a\,;\,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- La suite (u_n) admet comme limite $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty\,;\,a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Limites de suites usuelles :

Remarque :(u_n) diverge si la suite a une limite **infinie** ou pas de limite.

Exemple : (u_n) avec $u_n = (-1)^n$; cette suite est divergente.
En effet ; effectuons un raisonnement par l'absurde et supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ. Considérons alors l'intervalle $\left]\ell - \dfrac{1}{4}\,;\,\ell + \dfrac{1}{4}\right[$; cet intervalle a pour largeur $\dfrac{1}{2}$.
Les termes de la suite valent alternativement -1 ou 1. Pour que l'intervalle précédent contienne tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, il faudrait qu'il ait une amplitude de 2, ce qui est impossible.

VI Cas des suites arithmétiques et géométriques

1) Limites de suites arithmétiques

Soit (u_n) arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $r = 0$, (u_n) est constante donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.

2) Limites de suites géométriques :

Théorème :

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Théorème :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q = 1$, (u_n) est constante donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- Si $q > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$ si $u_0 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = -\infty$ si $u_0 < 0$.
- Si $q < -1$, alors (u_n) diverge.

3) Suites du type $u_{n+1} = au_n + b$

C'est le type d'exercices que l'on rencontre souvent au bac !

Soient a et b deux réels ; on considère la suite () définie par : $u_{n+1} = au_n + b$.
C'est une suite définie par récurrence ; on a $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction affine $x \longmapsto ax + b$.

Exemple :

1. tude d'une suite :
   u est la suite définie par $u_0 = 100$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 3$.
   (a) Calculer les différents termes de la suite à l'aide d'une calculatrice et conjecturer les variations ainsi que la limite de cette suite.
   (b) On introduit une suite auxiliaire v définie par $v_n = u_n - 15$.
   Démontrer que v est géométrique de raison $q = 0,8$.
   (c) En déduire l'expression de $v_{n,}$en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.
   (d) En déduire la limite de u.
2. Lutte contre la déforestation :
   En 1980, un pays comptait environ 100 milliers d'hectares de forêt.On estime que chaque année, 20 % de cette couverture forestière disparat. Afin de lutter contre ce fléau, chaque année, une organisation plante des arbres sur 0,3 millier d'hectares.
   (a) Combien d'hectares de forêt y avait-il ou y aura-t-il en 1990 ? en 2000 ? en 2020 ?

(b) Dans un grand nombre d'années, quelle sera la couverture forestière de ce pays ?

Exercices du bac

4) Suites du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Exemple : livre page 301

VII Représentation graphique des termes d'une suite

1) Suite définie de façon explicite

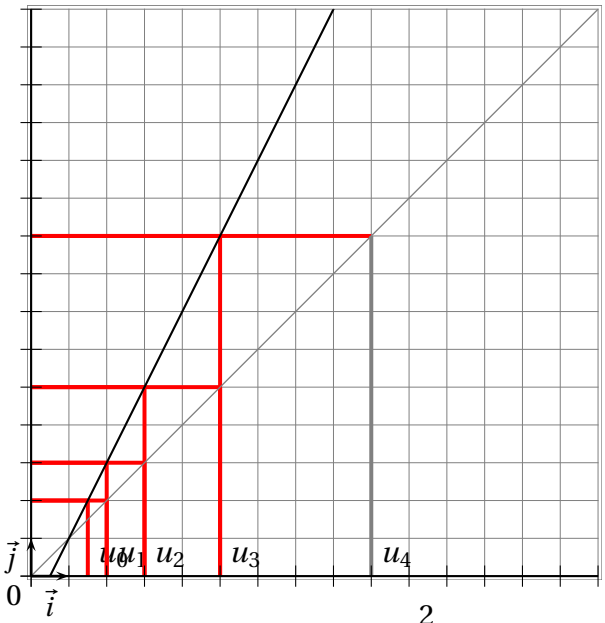
On a $u_n = f(n)$ où f est une fonction.
On représente les points de coordonnées $(n\ ;\ f(n))$.

2) Suites définies par récurrence

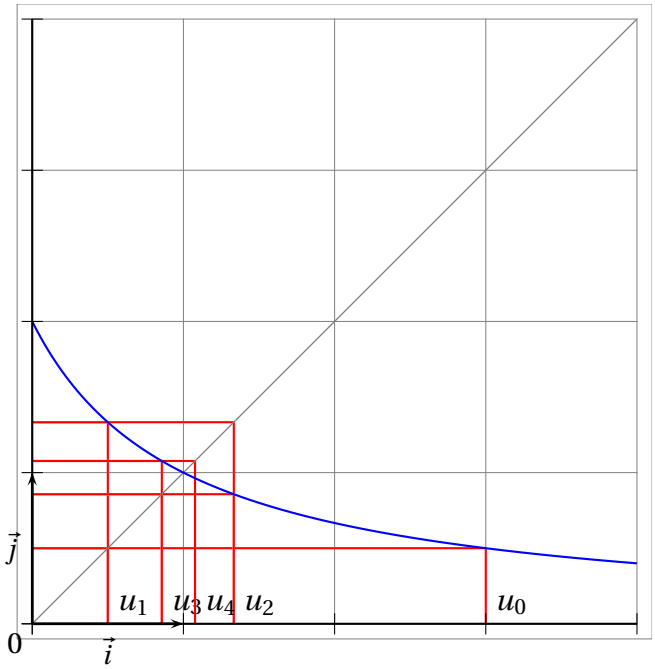
Soit une suite définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction.

- On trace un repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$, puis la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y = x$ (première bissectrice).
- On trace la représentation graphique de la fonction f dans le même repère.
- On place u_0 sur l'axe des abscisses et le point $M_0(u_0\ ;\ 0)$ sur l'axe des abscisses.
- On veut représenter u_1 ; par définition, $u_1 = f(u_0)$. On trace en pointillés le segment parallèle à l'axe des ordonnées, joignant M_0 au point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de même abscisse, puis en pointillés le segment joignant ce point au point de même ordonnée de la droite $\mathscr{D}$. Ces deux points ont pour ordonnée u_1.
  Comme $\mathscr{D}$ a pour équation $y = x$, ce dernier point a pour abscisse u_1, que l'on place sur l'axe des abscisses et on note M_1 le point de coordonnées $(M_1\ ;\ 0)$.
- On recommence la construction précédente avec u_1, puis u_2, etc.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$.



Autre exemple (à faire sur papier quadrillé) : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{1 + u_n}$


$\vec{j}$
u_1
u_3
u_4
u_2
u_0
0
$\vec{i}$