Correction du devoir n° 1

I

On note $S_0 = 50\,000$.

1. (a) On obtient :
   $S_1 = 80\% \times S_0 = 0,8S_0 = 0,8 \times 50\,000 = 40\,000$
   $S_2 = 80\% \times S_1 = 0,8S_1 = 32\,000$
   $E_0 = 20\% \times S_0 = 0,2S_0 = 0,2 \times 50\,000 = 10\,000$
   $E_1 = 0,2S_1 = 8\,000$
   $E_2 = 0,2S_2 = 64\,000$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{S_{n+1} = 80\% \times S_n = 0,8S_n}$.

   (c) On en déduit que (S_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $S_0 = 50\,000$.
   Par conséquent : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = S_0 q^n$ donc $\boxed{S_n = 50\,000 \times 0,8^n}$.
   Pour tout n, on a : $E_n = 20\% \times S_n$ donc $E_n = 0,2S_n = 0,2 \times 50\,000 \times 0,8^n$: $\boxed{E_n = 10\,000 \times 0,8^n}$.

2. (a) La somme totale reçue par la banque est :
   $D_n = S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1} =$. C'est la somme des termes consécutifs d'une suit géométrique.
   $D_n = D_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = 50\,000 \times \dfrac{1-0,8^n}{1-0,8} = 50\,000 \times \dfrac{1-0,8^n}{0,2}$
   $\boxed{D_n = 250\,000\left(1-0,8^n\right)}$.

   (b) La somme totale mise en réserve est : $R_n = E_0 + E_1 + \cdots + E_{n-1}$.
   C'est la somme de stermes consécutifs d'une suuite géométrique, de raison $q = 0,8$.
   $E_n = E_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = 10\,000\dfrac{1-0,8^n}{1-0,8} = 50\,000\left(1-0,8^n\right)$; $\boxed{E_n 50\,000\left(1-0,8^n\right)}$

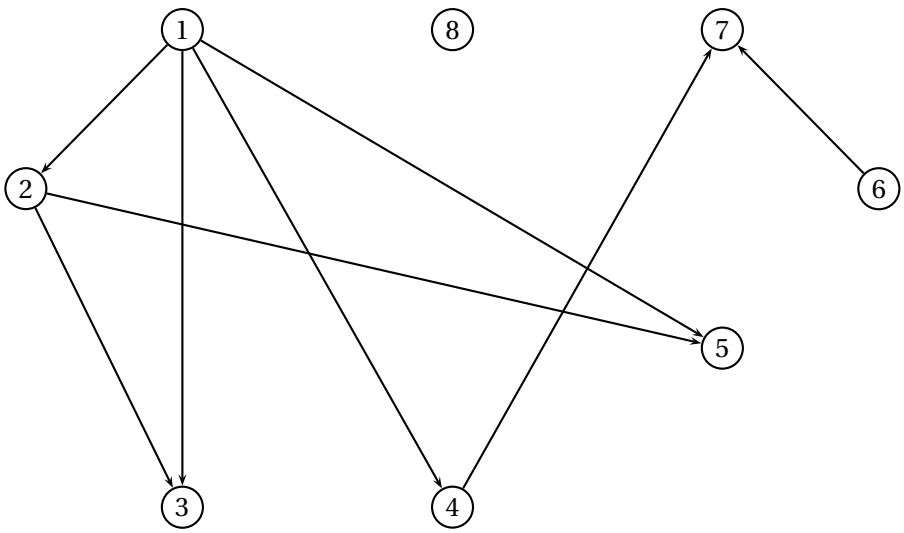
3. (a) $-1 < q = 0,8 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
   Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-0,8^n\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(50\,000\left(1-0,8^n\right)\right) = 50\,000$.
   La limite R de la some mise en réserve est égale à la somme initiale, 50 000€.

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ donc la suite (D_n) est convergente et sa limite D vaut : $D = \lim\limits_{n\to+\infty} D_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(250\,000\left(1-0,8^n\right)\right) = 250\,000$.

   (c) $D - S_0 = 200\,000 = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$ représente la somme versée par dépôts.

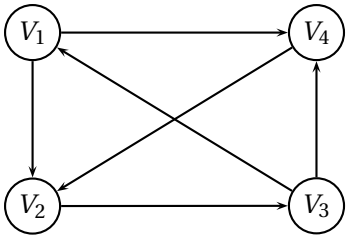
II

1.



2. Soit A la matrice associée à ce graphe. La ligne de A dont la somme des termes est la plus grande donne le nombre de chapitres prérequis à étudier en premier : c'est le chapitre 1.

III

1. 

2. Il est clair que chaque ville V_i est reliée à chaque ville V_j en trois étapes au plus, donc avec au plus deux escales.

3. (a) La matrice M asociée à ce graphe est :

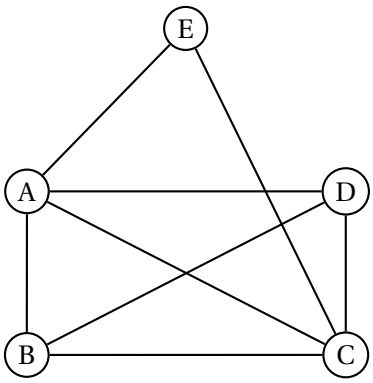
$$M\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) On a alors :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Notons a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} le terme général des matrices M, M^2 et M^3.
On sait que le terme a_{ij} correspond au nombre de chaînes de longueur 1 entre i et j, b_{ij} au nombre de chaînes de longueur 2 entre i et j et c_{ij} au nombre de chaînes de longueur 3.
L'existence d'un vol entre V_i et V_j correspond à l'existence d'un terme non nul a_{ij}, b_{ij} ou c_{ij} dans une des trois matrices M, M^2 ou M^3.
C'est bien le cas.

IV

1. 

Ce graphe est connexe (deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne), mails il n'est pas complet (B et E ne sont par exemple pas adjacents).

2. Regardons les degrés des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	4	3	4	3	2

Il n' a que deux sommets de degré impair, B et D, donc il existe une chaîne eulérienne entre B et D.
Tous les sommets ne soont pas de degré pair, donc il n'y a pas de cycle eulérien.

3. Soit γ le nombre chromatique.
ABCD est un sous-graphe d'ordre 4, donc $\gamma \geqslant 4$.
Le degré le plus grand d'un sommet est $D = 4$, donc $\gamma \leqslant 1 + D = 5$.
Par conséquent : $4 \leqslant \gamma \leqslant 5$. Pour trouver la valeur de γ, appliquons l'algorithme de Welsh-Powell : Liste des sommets ordonnés selon l'ordre décroissant de leur degré :

Sommet	A	C	B	D	E
Degré	4	4	3	3	2

- On passe à la couleur Rouge que l'on attribue au sommet A .
- On passe à la couleur Bleue que l'on attribue au sommet C .
- On passe à la couleur Vert que l'on attribue au sommet B . Le sommet E n'est relié à aucun sommet de couleur vert, on lui affecte donc cette couleur .
- On passe à la couleur Jaune que l'on attribue au sommet D .

Résultat de la coloration :

Sommet	A	C	B	D	E
Degré	4	4	3	3	2
Couleur	Rouge	Bleue	Vert	Jaune	Vert

Le nombre chromatique est $\gamma = 4$.

4. (a) On a : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & \mathbf{2} & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ \mathbf{3} & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Il y a deux chaînes de longueur 2 entre A et B et trois chaînes de longueur 2 entre C et A.

5. $M^3 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 9 & 7 \\ 29 & 6 & 9 & \mathbf{7} & 4 \\ 9 & 9 & 8 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 9 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ Il y a sept chaînes de longueur 3 entre B et D.