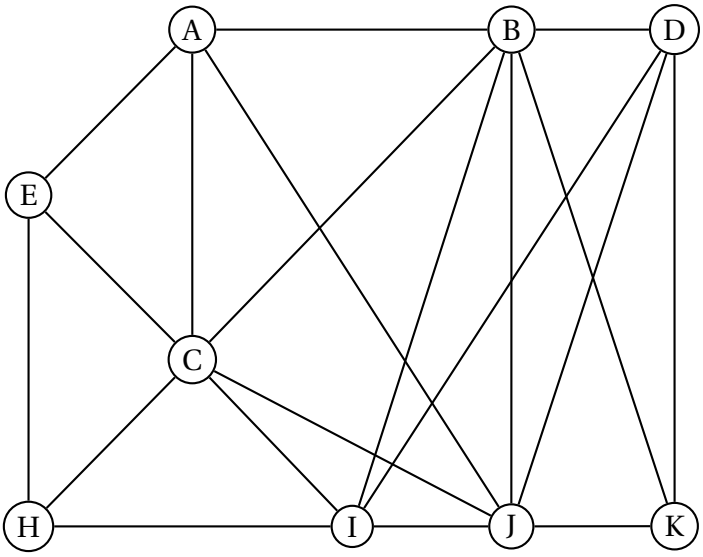
# TES spécialité : contrôle sur les graphes (1)

## I

Les sommets du graphe ci-dessous représentent les lacs du delta d'un grand fleuve.
Chaque arête représente un canal de communication entre deux lacs.




1. Déterminer le degré de chaque sommet.
2. En déduire le nombre de canaux de communication entre les lacs.

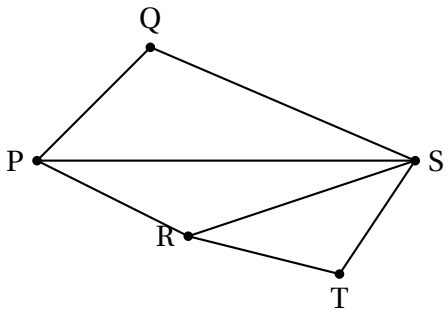
## II

Représenter un graphe associé à la matrice $M$ suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## III

On considère le graphe PQRST ci-dessous :




1. Ce graphe contient-il une chaîne eulérienne ?
2. Contient-il un cycle eulérien ?

## IV

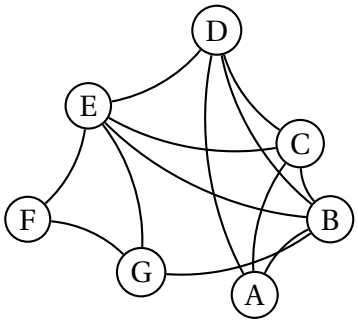
Étant donné un groupe de dix personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui ont une relation d'amitié :

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| amis de i | 3, 6, 7 | 6, 8 | 1, 6, 7 | 5, 10 | 4, 10 | 1, 2, 3, 4 | 1, 3, 6 | 2 | | 4, 5 |

1. Représenter cette situation par un graphe d'ordre 10 dans lequel l'existence d'une arête entre les soùmmets i et j signifie qu'il y a une relation d'amitié entre i et j.
2. (a) Si l'adage « les amis de nos amis sont nos amis » était vérifié, quelle propriété aurait le graphe ?
   (b) En déduire que cet adage n'est pas vérifié dans ce graphe.

## V Polynésie juin 2006

Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G. Cela conduit au graphe $\mathscr{G}$ suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :




1. Le graphe $\mathscr{G}$ est-il complet ? Quel est l'ordre de $\mathscr{G}$ ?
2. (a) Sur les cartes d'embarquement, la compagnie attribue à chaque aéroport une couleur, de sorte que deux aéroports liés par un vol direct aient des couleurs différentes.
   Proposer un coloriage adapté â cette condition.
   (b) Que peut-on en déduire sur le nombre chromatique de $\mathscr{G}$ ?
3. (a) Quelle est la nature du sous graphe formé par les sommets A, B, C et D ?
   (b) Quel est le nombre minimal de couleurs que la compagnie doit utiliser pour pouvoir attribuer une couleur à chaque aéroport en respectant les conditions du 2. ?
4. (a) En considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, construire la matrice $M$ associée à $\mathscr{G}$.
   (b) On donne :
   $$M^8 = \begin{pmatrix} 6945 & 9924 & 8764 & 8764 & 9358 & 3766 & 5786 \\ 9924 & 14345 & 12636 & 12636 & 13390 & 5486 & 8310 \\ 8764 & 12636 & 11178 & 11177 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 8764 & 12636 & 11177 & 11178 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 9358 & 13390 & 11807 & 11807 & 12634 & 5095 & 7807 \\ 3766 & 5486 & 4829 & 4829 & 5095 & 2116 & 3181 \\ 5786 & 8310 & 7369 & 7369 & 7807 & 3181 & 4890 \end{pmatrix}$$
   Combien y a-t-il de chemins de longueurs 8 qui relient B à D ?
5. (a) Pourquoi est-il impossible pour un voyageur de construire un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois ?
   (b) Montrer qu'il est possible de construire un tel itinéraire en ajoutant une seule liaison qui n'existe pas déjà et que l'on précisera.

## VI Antilles juin 2006

Un jardinier doit décorer un jardin privatif en répartissant 10 variétés de fleurs notées $V_1$ à $V_{10}$ dans différents parterres. Certaines de ces variétés ne peuvent pas être plantées ensemble pour des raisons diverses (tailles, couleurs, conditions climatiques, ...) et ces incompatibilités sont résumées dans le tableau ci-dessous (une croix indique qu'il y a incompatibilité entre deux variétés).

| Fleur | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ | $V_5$ | $V_6$ | $V_7$ | $V_8$ | $V_9$ | $V_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_1$ | | | × | | | × | | | | × |
| $V_2$ | | | × | × | × | | | × | | |
| $V_3$ | × | × | | × | | × | | | | |
| $V_4$ | | × | × | | × | | | × | × | |
| $V_5$ | | × | | × | | | × | × | | |
| $V_6$ | × | | × | | | | × | | | |
| $V_7$ | | | | | × | × | | | | |
| $V_8$ | | × | | × | × | | | | | |
| $V_9$ | | | | × | | | | | | × |
| $V_{10}$ | × | | | | | | | | × | |

1. Représenter par son graphe G la situation
2. (a) Trouver un sous-graphe complet d'ordre 4 et le dessiner.
   (b) Que peut-on en déduire pour la coloration du graphe G ?
   Quel est le nombre minimum de parterres que le jardinier doit décorer ?
3. (a) Classer les sommets de G par ordre de degré décroissant.
   (b) En déduire un encadrement de $C$, nombre chromatique de G.
4. (a) Procéder à la coloration du graphe G.
   (b) Que peut-on en déduire pour le nombre $C$ ? Justifier avec soin.
   (c) Proposer un ensemble de parterres avec une répartition adaptée des variétés de fleurs.