TES spécialité : contrôle

I

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.
Calculer u_{12}

II

(u_n) est une sute arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
On sait que $u_4 = 19$ et $u_{15} = 63$.
Calculer u_{19}.

III

(u_n) est une suite arithmétique, de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = 5$.
Calculer la somme $u_2 + u_3 + \cdots + u_{12}$

IV

(u_n) est une suite définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n}{1+u_n} \text{ pour tout } n \end{cases}$.

Calculer u_1 et u_2.

V

Quel est le sens de variation de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 2 \end{cases}$? Justifier.

VI

Que vaut la somme $S = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{13}$?

VII Nouvelle Calédonie, novembre 2008

Lors d'un jeu, Marc doit répondre à la question suivante :

« Le premier jour, nous vous offrons 100 € puis chaque jour suivant, nous vous offrons 5 % de plus que la veille et une somme fixe de 20 €.

Au bout de combien de jours aurez-vous gagné 10 000 € ? »

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le montant total en € versé à Marc le n-ième jour.
   Ainsi, $u_1 = 100$.
   (a) Calculer u_2.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 1,05u_n + 20$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose
   $$v_n = u_n + 400.$$
   (a) Calculer v_1.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
   (c) Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire que $u_n = 500 \times 1,05^{n-1} - 400$.
   (d) Déterminer, en fonction de n, la somme
   $$v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$
3. Quelle réponse Marc doit-il donner ?

VIII Financement d'un voyage

Monsieur X a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts).
À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret.
On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1er janvier de l'année $(2003 + n)$, où n est un entier naturel.
Ainsi, on a :
$C_0 = 2000$.

1. (a) Calculez le capital disponible le 1er janvier 2004.
   (b) Établissez, pour tout entier naturel n, une relation entre C_{n+1} et C_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = C_n + 20000$.
   (a) Démontrez que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   (b) Exprimez u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $C_n = 22000 \times (1,035)^n - 20000$.
   (d) Calculez le capital disponible le 1er janvier 2008 (on arrondira le résultat à l'euro près).
3. Le premier janvier 2008, Monsieur X retirera alors le capital disponible de la banque pour financer un voyage dont le coût (supposé fixe) est de 6000 €.
   Il paiera cette somme de 6000 € en quatre mensualités qui seront quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 800 €.
   Calculez le montant de chacune de ces quatre mensualités.

Barème : 1 - 2 - 1 - 2 - 2 - 2 - 5 - 5