Maladie

Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), sain, c'est-à-dire non malade et non immunisé, (S).

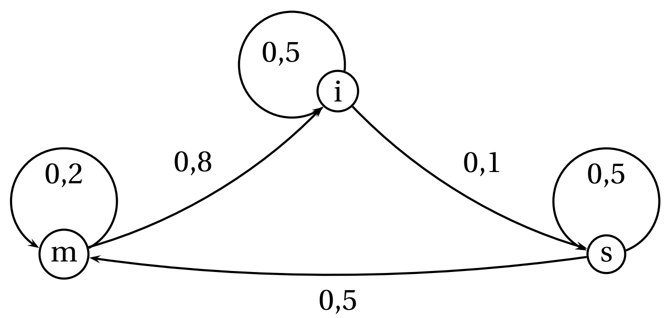
D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

— étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;

— étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;

— étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

1. Le graphe probabliste correspondant à la situation est :



La matrice de transition est alors $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}}$

2. Calculons l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans pour chacune des situations suivantes :

— **au départ, il est immunisé**

L'état initial est $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Comme pour le premier exemple, on trouve $P_n = P \times M^n$.

- Au bout de trois mois, on a : $P_3 \approx \begin{pmatrix} 0,769 & ,08 & 0,151 \end{pmatrix}$
- Au bout de six mois, on a : $P_6 \approx \begin{pmatrix} 0,754 & ,948 & 0,1513 \end{pmatrix}$
- Au bout d'un an donc 12 mois, on a : $P_{12} \approx \begin{pmatrix} 0,755 & ,0943, & 0,1509 \end{pmatrix}$
- Au bout de deux ans donc 24 mois, on a : $P_{24} \approx \begin{pmatrix} 0,755 & ,0943, & 0,1509 \end{pmatrix}$

— **au départ, il est non malade et non immunisé** : alors $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Au bout de trois mois, on a : $P_3 \approx \begin{pmatrix} 0,64 & 0,195 & 0,165 \end{pmatrix}$
- Au bout de six mois, on a : $P_6 \approx \begin{pmatrix} 0,7584 & 0,0927 & 0,1488 \end{pmatrix}$
- Au bout d'un an donc 12 mois, on a : $P_{12} \approx \begin{pmatrix} 0,7547 & ,0943, & 0,1509 \end{pmatrix}$
- Au bout de deux donc 24 mois, on a : $P_{24} \approx \begin{pmatrix} 0,755 & ,0943, & 0,1509 \end{pmatrix}$

— **au départ, il est malade**. Alors $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Au bout de trois mois, on a : $P_3 \approx \begin{pmatrix} 0,824 & 0,048 & 0,128 \end{pmatrix}$
- Au bout de six mois, on a : $P_6 \approx \begin{pmatrix} 0,7584 & 0,0927 & 0,1488 \end{pmatrix}$
- Au bout d'un an donc 12 mois, on a : $P_{12} \approx \begin{pmatrix} 0,7547 & ,0943, & 0,151 \end{pmatrix}$

- Au bout de deux donc 24 mois, on a : $P_{24} \approx \begin{pmatrix}0,747 & ,09434, & 0,1509\end{pmatrix}$

3. On note $\begin{pmatrix}i & m & s\end{pmatrix}$ l'état stable du système.

   (a) Notons $P = \begin{pmatrix}i & m & s\end{pmatrix}$ l'état stable.

   On a alors $P = PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix}i & m & s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I & m & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,9 & 0 & 0,1\\ 0,8 & 0,2 & 0\\ 0 & 0,5 & 0,5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i & = 0,9i + 0,8m\\ m & = 0,2m + 0,5s\\ & s = 0,1i + 0,5s\end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} -0,1i + 0,8m & = 0\\ -0,8m + 0,5s & = 0\\ 0,1i \quad -0,5s & = 0\\ i + \quad m + \quad s & = 1\end{cases}.$

   En multipliant tout par 10, on obtint :

   $\begin{cases} -i + 8m & = 0\\ -8m + 5s & = 0\\ i \quad -5s & = 0\\ i + \quad m + \quad s & = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i & = 8m\\ 5s & = 8m\\ i & = 5s\\ i + m + \quad s & = 1\end{cases}$

   On en déduit : $\begin{cases} i & = 8m\\ s & = \dfrac{8}{5}m\\ i & = 5s\\ i + m + s = 1\end{cases}.$

   On remplace dans la dernière équation : $i + m + s = 1 \Leftrightarrow 8m + m + \dfrac{8}{5}m = 1 \Leftrightarrow \left(8 + 1 + \dfrac{8}{5}\right)m = 1 \Leftrightarrow$ $\dfrac{53}{5}m = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{53}.$

   Alors : $i = 8m = \dfrac{60}{53}$ et $s = \dfrac{8}{5}m = \dfrac{8}{\cancel{5}} \times \dfrac{\cancel{5}}{53} = \dfrac{8}{53}.$

   On en déduit $\begin{pmatrix}I & m & s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{40}{53} & \dfrac{5}{53} & \dfrac{8}{53}\end{pmatrix}.$

   (b) On en déduit que l'état stable est $\boxed{P = \begin{pmatrix}\dfrac{40}{53} & \dfrac{5}{53} & \dfrac{8}{53}\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0,7547 & 0,09434 & 0,15094\end{pmatrix}}$.

   L'état stable est la limite de la suite (P_n) quand n tend vers $+\infty$, ce qu'on a observé sur l'état du système au cours du temps selon ls états initiaux observés.