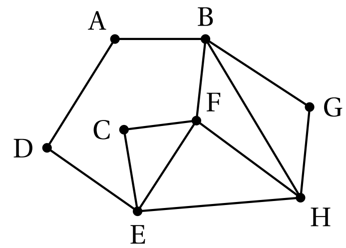
TES spécialité : devoir sur feuille n° 2

I Métropole-Réunion juin 2015

Partie A



1. (a) Ce graphe Γ possède 8 sommets et c'est un graphe connexe, la chaîne A-B-G-H-F-C-E-D passe par tous les sommets, deux sommets quelconques seront toujours reliés par une chaîne.

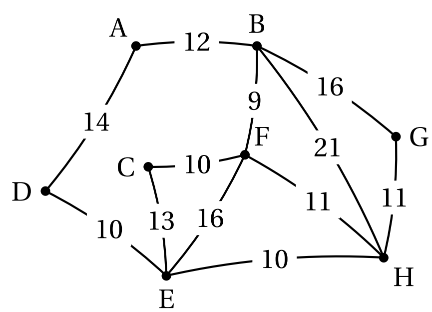
   (b) Tableau des sommets degrés

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	2	4	2	2	4	4	2	4

   Le graphe a tous ses sommets de degré pair, étant connexe, il admet un cycle Eulérien d'après le théorème d'Euler, donc à fortiori une chaîne eulérienne.

2. Le nombre de chemin de longueur 3 reliant E à B est donné par $M_{25}^{(3)} = 5$, il y 5 chemins de longueur 3 reliant E à B.

Partie B



1. (a) Nous avons déjà répondu à la question dans la partie A 1. b.
   Voici un exemple de cycle : A-B-F-C-E-F-H-B-G-H-E-D-A .(nous avons utilisé ici l'algorithme d'Euler).

   (b) Nous cherchons ici tous les chemins de longueurs 3 reliant le refuge E au refuge B. Il y en a 5 (d'après la question 2. b. de la partie A).
   Voici les chemins possibles : E-C-F-B   E-H-F-B   E-D-A-B   E-H-G-B   E-F-H-B.

2. Pour déterminer la distance la plus courte entre A et H, nous utiliserons l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	H	sommet choisi	poids
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A	0
|	12 (A)	∞	14 (A)	∞	∞	∞	∞	B	12
|	|	∞	14 (A)	∞	21 (B)	28 (B)	33 (B)	D	14
|	|	∞	|	24 (D)	21 (B)	28 (B)	33 (B)	F	21
|	|	31 (F)	|	24 (D)	|	28 (B)	32 (F)	E	24
|	|	31 (F)	|	|	|	28 (B)	32 (F)	G	28
|	|	31 (F)	|	|	|	|	32 (F)	C	31
|	|	|	|	|	|	|	32 (F)		32

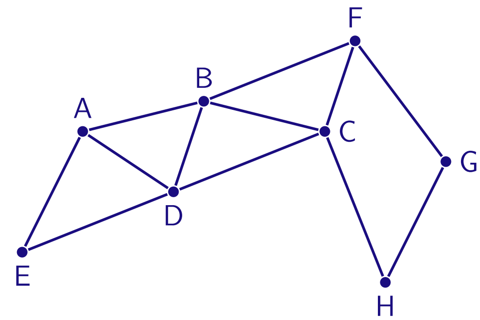
La distance la plus courte vaut : 32

La chaîne qui la réalise vaut : A-B-F-H.

L'itinéraire le plus court reliant A à H fait donc 32 km et passe par les sommets suivants : A-B-F-H.

II Métropole-Réunion septembre 2016

Un parc de loisirs décide d'ouvrir une nouvelle attraction pour les jeunes enfants : un parcours pédestre où chaque enfant doit recueillir, sur différents lieux, des indices pour résoudre une énigme. Le parcours est représenté par le graphe ci-dessous. Les sommets représentent des lieux où sont placés les indices ; les arêtes représentent des chemins pédestres qui les relient.



Partie A

1. Un enfant peut parcourir chaque chemin pédestre du circuit une fois et une seule si le graphe possède 0 ou 2 sommets de degré impair (théorème d'Euler).

   On cherche les degrés des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	3	4	4	4	2	3	2	2

   Il y a deux sommets de degrés impairs, donc il existe un trajet empruntant chaque chemin pédestre une fois et une seule (un chemin eulérien du graphe) partant d'un de ces sommets et arrivant à l'autre ; par exemple :

   AE – ED – DA – AB – BD – DC – CB – BF – FC – CH – HG – GF

2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

   On donne la matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 20 & 21 & 11 & 13 & 5 & 5 \\ 18 & 32 & 25 & 25 & 17 & 16 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 31 & 19 & 13 & 13 & 14 & 5 \\ 21 & 25 & 19 & 31 & 13 & 21 & 4 & 12 \\ 11 & 17 & 13 & 13 & 11 & 6 & 4 & 3 \\ 13 & 16 & 13 & 21 & 6 & 20 & 3 & 13 \\ 5 & 10 & 14 & 4 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 12 & 3 & 13 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

   Le nombre de parcours allant de E (sommet n° 5) à H (sommet n° 8) en 4 chemins pédestres est le nombre de la matrice M^4 situé à la ligne 5 et la colonne 8 : il y a donc trois chemins de longueur 4 reliant E à H :

   EA – AD – DC – CH ; ED – DB – BC – CH ; EA – AB – BC – CH

Partie B

Afin d'améliorer la qualité de ses services, une étude statistique a relevé la durée moyenne d'attente en minutes à la billetterie du parc en fonction de l'heure. Ce relevé a eu lieu chaque heure de 9 h à 16 h. On obtient le relevé suivant :

Ainsi, à 10 h, il y avait 14 minutes d'attente à la billetterie.

On souhaite modéliser cette durée d'attente par une fonction qui à l'heure associe la durée d'attente en minutes. Ainsi, il sera possible d'avoir une estimation de la durée d'attente.

On choisit de modéliser cette situation à l'aide de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, c des réels et a non nul telle que les trois points (9 ; 9), (11 ; 20) et (16 ; 2) appartiennent à la représentation graphique de f.

1. On appelle $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

Le point de coordonnées (9 ; 9) appartient à $\mathscr{C}_f \iff f(9)=9 \iff 81a+9b+c=9$

Le point de coordonnées (11 ; 20) appartient à $\mathscr{C}_f \iff f(11)=20 \iff 121a+11b+c=20$

Le point de coordonnées (16 ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f \iff f(16)=2 \iff 256a+16b+c=2$

Il faut donc résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 81a & + & 9b & + & c & = & 9\\ 121a & + & 11b & + & c & = & 20\\ 256a & + & 16b & + & c & = & 2\end{array}\right.$

Le système est équivalent à l'équation matricielle : $\begin{pmatrix}81 & 9 & 1\\121 & 11 & 1\\256 & 16 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\20\\2\end{pmatrix}$

On trouve à la calculatrice que $\begin{pmatrix}81 & 9 & 1\\121 & 11 & 1\\256 & 16 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{14} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{35}\\ -\frac{27}{14} & \frac{5}{2} & -\frac{4}{7}\\ \frac{88}{7} & -\frac{72}{5} & \frac{99}{35}\end{pmatrix}$

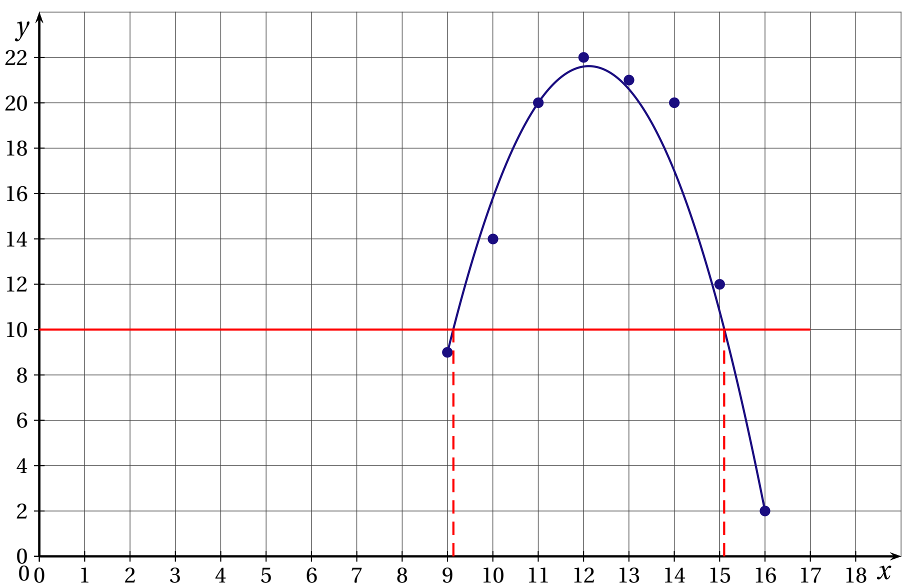
$$\begin{pmatrix}81 & 9 & 1\\121 & 11 & 1\\256 & 16 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\20\\2\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}81 & 9 & 1\\121 & 11 & 1\\256 & 16 & 1\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}9\\20\\2\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{14} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{35}\\ -\frac{27}{14} & \frac{5}{2} & -\frac{4}{7}\\ \frac{88}{7} & -\frac{72}{5} & \frac{99}{35}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}9\\20\\2\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{13}{10}\\ \frac{63}{2}\\ -\frac{846}{5}\end{pmatrix}$$

Donc $a=-\dfrac{13}{10}=-1,3$, $b=\dfrac{63}{2}=31,5$ et $c=-\dfrac{846}{5}=-169,2$ et on peut dire que

$$f(x)=-1,3x^2+31,5x-169,2.$$

2. En utilisant ce modèle, on détermine sur quelle(s) plage(s) horaire(s) l'attente peut être inférieure à dix minutes.



Il faut donc résoudre l'inéquation $f(x)<10$:

$f(x)<10 \iff -1,3x^2+31,5x-169,2<10 \iff -1,3x^2+31,5x-179,2<0$

$\Delta=31,5^2-4\times(-1,3)\times(-179,2)=60,41>0$

Les solutions de l'équation $f(x)=10$ sont $\dfrac{-31,5-\sqrt{60,41}}{2\times(-1,3)}\approx 15,1$ et $\dfrac{-31,5+\sqrt{60,41}}{2\times(-1,3)}\approx 9,1$

$f(x)$ est du signe de $-1,3$ donc négatif à l'extérieur des racines donc pour $x < 9,1$ et $x > 15,1$.

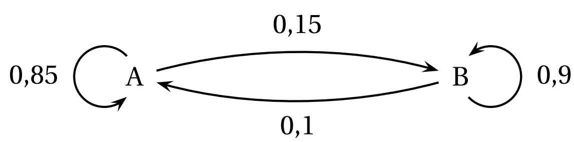
$9,1 = 9 + \dfrac{1}{10} = 9 + \dfrac{6}{60} = 9$ h 6 min ; de même $15,1 = 15$ h 6 min.

L'attente peut être inférieure à dix minutes entre 9 heures et 9 heures 6 minutes puis entre 15 heures 6 minutes et 16 heures.

III Polynésie juin 2013

Partie A

1. Graphe probabiliste représentant la situation :



2. (a) Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

   (b) En 2013, $n = 3$ et $P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$.

   (c) On sait que $P = P \times M$ d'où $\begin{cases} a = 0,1b + 0,85a \\ b = 0,9b + 0,15a \end{cases}$. Ces deux égalités amènent à l'équation $0,15a - 0,1b = 0$. On sait de plus que $a + b = 1$ donc on a le système $\begin{cases} a + b = 1 \\ 0,15a - 0,1b = 0 \end{cases}$ d'où :

   $$\begin{cases} a = 1 - b \\ 0,15 - 0,15b - 0,1b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 - b \\ b = \dfrac{0,15}{0,25} = 0,6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0,4 \\ b = 0,6 \end{cases}$$

   Ainsi, le système se stabilise autour de l'état stable $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ ce qui signifie qu'à *long terme*, le fournisseur d'accès B possédera 60 % du marché.

Partie B

1. Cela revient à résoudre le système $\begin{cases} s + c = 550 & \text{(nombre total d'objets)} \\ 0,8s + 1,2c = 540 & \text{(coût total)} \end{cases}$.

2. Soit $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients, $X = \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}$ la matrice colonne représentant les deux inconnues et $T = \begin{pmatrix} 550 \\ 540 \end{pmatrix}$ la matrice colonne représentant le second membre.

   On a alors $R \times X = T \iff \begin{cases} s + c = 550 & \text{nombre total d'objets} \\ 0,8s + 1,2c = 540 & \text{coût total} \end{cases}$.

3. $X = R^{-1} \times T = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \end{pmatrix}$.

   L'entreprise B a distribuée 300 stylos et 250 porte-clés.