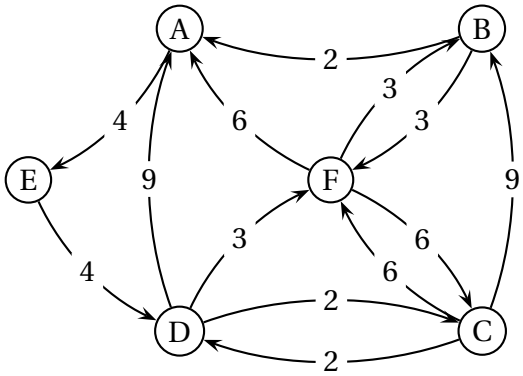
Exercices de bac (3/6/2010)

I

Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après-midi, charger son camion à l'entrepôt, noté A, livrer cinq clients notés B, C, D, E et F , puis retourner à l'entrepôt.
Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation et les temps de parcours (en minutes) sont indiqués sur le graphe G ci-dessous.



1. Donner la matrice M associée à ce graphe.
2. On s'intéresse aux chemins partant de l'entrepôt A et se terminant en A.
   (a) Combien existe-t-il de chemins de longueur 6 ?
   (b) Citer ces chemins.
   (c) Parmi les chemins qui passent par tous les sommets du graphe, lequel minimise le temps de parcours ?

II Bac Liban mai 2010

Deux chaînes de télévision A et B programment chaque semaine, à la même heure, deux émissions concurrentes. On suppose que le nombre global de téléspectateurs de ces émissions reste constant.

La première semaine, 70 % de ces téléspectateurs ont regardé la chaîne A.

Une étude statistique montre que :

15 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne A une semaine, regardent la chaîne B la semaine suivante.

10 % des téléspectateurs qui ont regardé la chaîne B une semaine, regardent la chaîne A la semaine suivante. On note respectivement a_n et b_n les proportions de téléspectateurs des chaînes A et B la n-ième semaine et P_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$. On a donc $P_1 = (0,7 \quad 0,3)$.

1. (a) Déterminer le graphe probabiliste représentant la situation.
   (b) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.
2. Calculer M^3 à l'aide de la calculatrice, donner les résultats en arrondissant à 10^{-3} près. Quelle est la répartition des téléspectateurs entre les deux chaînes lors de la quatrième semaine ?
3. On considère la matrice ligne $P = (a \quad b)$, où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.
   (a) Déterminer a et b pour que $P = PM$.
   (b) Interpréter les deux valeurs trouvées.
4. On admet que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $a_n = 0,4 + 0,3 \times \left(0,75^{n-1}\right)$.
   (a) Résoudre l'inéquation $a_n < 0,5$.
   (b) À partir de quelle semaine l'audience de l'émission de la chaîne B dépassera-t-elle celle de l'émission de la chaîne A ?

III Réunion, juin 2007

Pour chacune des cinq questions suivantes numérotées de 1 à 5, une et une seule des trois propositions a, b, c est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la proposition exacte. Aucune justification n'est attendue.
Pour chaque question, une réponse correcte rapporte 1 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, une absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note pour cet exercice est ramenée à 0.

1. La suite (u_n) est définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = 1 - \dfrac{6}{n - 10,5}$.
   (a) : La suite (u_n) est croissante.
   (b) : La suite (u_n) est décroissante.
   (c) : La suite (u_n) n'est pas monotone.
2. La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -0,1u_n$.
   (a) : La suite (u_n) est arithmétique.
   (b) : La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
   (c) : La suite (u_n) est géométrique.

3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :
   - le plan (P) d'équation $x+y+z-2=0$,
   - la droite (D) d'équations cartésiennes $y=1$ et $z=1-x$.

   (a) : La droite (D) est sécante au plan (P).

   (b) : La droite (D) est incluse dans le plan (P).

   (c) : La droite (D) est strictement parallèle au plan (P).

4. La matrice d'un graphe non orienté G, de sommets A, B, C, D, E est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) : Le graphe G comporte 12 arêtes.

   (b) : Le graphe G admet une chaîne eulérienne.

   (c) : Le graphe G est complet.

5. Les ventes d'un nouveau roman ont régulièrement progressé de 2 % chaque semaine depuis sa parution. Au cours de la première semaine il s'en était vendu dix mille exemplaires.
   Le nombre d'exemplaires vendus au cours des 45 semaines écoulées depuis sa parution est :
   a : 23 900 b : 718 927 c : 743 306

IV France juin 2006

Dans une région de France supposée démographiquement stable, on compte 190 milliers d'habitants qui se déplacent en voiture pour aller travailler : les uns se déplacent seuls dans leur voiture, les autres pratiquent le co-voiturage. On admet que :

- si une année un habitant pratique le co-voiturage, l'année suivante il se déplace seul dans sa voiture avec une probabilité égale à $0,6$;
- si une année un habitant se déplace seul dans sa voiture, l'année suivante il pratique le co-voiturage avec une probabilité égale à $0,35$.

Première partie

On note C l'état « pratiquer le co-voiturage » et V l'état « se déplacer seul dans sa voiture ».

1. Dessiner un graphe probabiliste de sommets C et V qui modélise la situation aléatoire décrite.

2. En considérant C et V dans cet ordre, en ligne, la matrice de transition associée à ce (graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,60 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$. Vérifier que l'état stable du système correspond à la matrice ligne $(70 \quad 120)$.
   En donner une interprétation.

Deuxième partie

En 2000, 60 milliers d'habitants pratiquaient le co-voiturage et 130 milliers d'habitants se déplaçaient seuls dans leur voiture.
On appelle X_n (n entier naturel) le nombre de milliers d'habitants qui pratiquent le co-voiturage durant l'année $2000+n$. On a donc $X_0 = 60$.
On admet que pour tout entier naturel n,
$X_{n+1} = 0,05X_n + 66,5$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout entier naturel n par $U_n = X_n - 70$.

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

2. Montrer que pour tout entier naturel n,
   $X_n = 70 - 10 \times 0,05^n$.
   Est-il possible que, durant une année, le nombre d'habitants pratiquant le co-voiturage atteigne la moitié de la population de cette région ?