Géométrie dans l'espace

Table des matières

I Rappels **1**
- 1 Vecteurs de l'espace . . . 1
- 2 Vecteurs colinéaires . . . 2
- 3 Vecteurs coplanaires . . . 2
- 4 Repérage dans l'espace . . . 2
- 5 Vecteurs orthogonaux . . . 3
- 6 Distance entre deux points : . . . 3
- 7 Caractéristique analytique de l'orthogonalité : . . . 3

II Équations de plans et droites **3**
- 1 Équation cartésienne d'un plan . . . 3
- 2 Système d'équations cartésiennes d'une droite . . . 4

III Fonctions de deux variables et courbes de niveau **4**
- 1 Fonction de deux variables . . . 4
- 2 Courbes de niveau . . . 4

I Rappels

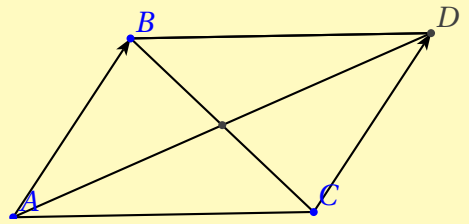
1 Vecteurs de l'espace

Les propriétés des vecteurs dans l'espace sont en partie les mêmes que celles concernant les vecteurs dans le plan.

Propriété

Les propriétés suivantes sont équivalentes :
A, B, C et D sont quatre points de l'espace.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- $ABDC$ est un parallélogramme.
- $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
- La translation qui transforme A en B transforme C en D.



Addition de vecteurs :

- **Relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- **Règle du parallélogramme :** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

2 Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'ils ont la même direction, c'est-à-dire qu'il existe un réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque : A, B et C sont alignés si, et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3 Vecteurs coplanaires

Définition

A, B, C et D sont quatre points de l'espace. Dire que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires signifie que les quatre points appartiennent à un même plan.

Propriété admise

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement, il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

4 Repérage dans l'espace

Définition

$\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ est repère de l'espace si O est un point de l'espace et si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs non coplanaires.
O est alors l'origine du repère.

Propriété

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, pour tout point M, il existe trois nombres x, y et z uniques tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + k\vec{j} + z\vec{k}$.
$(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les coordonnées de M dans ce repère.

Calcul avec les coordonnées :

Soient deux points A et B de coordonnées $A\left(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A\right)$ et $B\left(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B\right)$.
Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A\,;\,z_B-z_A\right)$.

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées sont égales.

5 Vecteurs orthogonaux

Définition

Soient deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace.
Soient trois points O, Aet B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si mes droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.
On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.
Par convention, $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

Vocabulaire : $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ est un repère orthogonal si, et seulement si, les vecteurs sont orthogonaux deux à deux.
Il est orthonormal s'il est orthogonal et chaque vecteur a une norme égale à 1.

6 Distance entre deux points :

Propriété

Soit un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ et soient deux points A et B.
Alors : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

7 Caractéristique analytique de l'orthogonalité :

Propriété

$\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace.
Les vecteurs $\vec{u}\,(x\,;\,y\,;\,z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y'\,;\,z')$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx' + yy' + zz' = 0$.

II Équations de plans et droites

1 Équation cartésienne d'un plan

Propriété

Dans un repère de l'espace :

- Tout plan (P) a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- a, b, c désignant des réels non simultanément nuls, l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.

Cas particuliers :
Le plan de base (xOy) a pour équation $z = 0$; le plan (xOz) a pour équation $y = 0$ et le plan (yOz) a pour équation $x = 0$.

Propriété

Deux plans d'équations cartésiennes $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont parallèles si, et seulement si, les coefficients a, b, c sont proportionnels aux coefficients a', b' et c'.

2 Système d'équations cartésiennes d'une droite

Propriété

Dans l'espace, une droite se voir comme l'intersection de deux plans sécants.
À chacun de ces deux plans correspond une équation cartésienne de plan.
Une droite est donc caractérisée par un système de deux équations linéaires à trois inconnues.

Exemple :
Soient (P) le plan d'équation $2x + 3y + 5z = 7$ et (Q) le plan d'équation $3x - y - 2z = 1$.
Ces deux plans ont pour vecteurs normaux respectivement $\overrightarrow{n_1}(2\,;\,3\,;\,5)$ et $\overrightarrow{n_2}(3\,;\,-1\,;\,-2)$.
Ils ne sont pas colinéaires, donc les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles.
Leur intersection est une droite $\mathscr{D}$, caractérisée par le système formé pas les deux équations des deux plans :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 7 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

III Fonctions de deux variables et courbes de niveau

1 Fonction de deux variables

Définition

x et y appartiennent chacun respectivement à deux intervalles I et J.
Définir une fonction des deux variables x et y, c'est associer à chaque couple $(x\,;\,y)$ un réel unique, noté $f(x\,;\,y)$.
La représentation graphique de f dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'espace est l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ avec $z = f(x\,;\,y)$.
Cette représentation graphique est en général une surface d'équation $z = f(x\,;\,y)$.

2 Courbes de niveau

Définition

Soit $\mathscr{S}$ une surface d'équation $z = f(x\,;\,y)$.
La courbe de niveau de cote c est l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $z = c$, donc l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ avec $z = f(x\,;\,y) = c$.

Exemple :

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $z = 3x^2 + 2y$.

La courbe de niveau de cote 3 est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant le système : $\begin{cases} z = 3x^2 + 2y \\ z = 3 \end{cases}$

On en déduit que dans le plan d'équation $z = 3$, la courbe de niveau a pour équation $3 = 3x^2 + 2y$ qui s'écrit $y = -\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}$. C'est l'équation d'une parabole.

La courbe de niveau d'abscisse 3 est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant le système : $\begin{cases} z = 3x^2 + 2y \\ x = 3 \end{cases}$.

On en déduit : $z = 27 + 2y$ donc $z = 2y + 27$. Dans le plan d'équation $x = 3$, $z = 2y + 27$ est l'équation d'une droite : la courbe de niveau $x =$ est une droite dans le plan d'équation $x = 3$.