Correction

I

1. La matrice associée à ce graphe est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. (a) $M^6 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 3 & 46 & \\ 19 & 11 & 12 & 9 & 6 & 16 \\ 36 & 28 & 23 & 22 & 18 & 34 \\ 37 & 24 & 25 & 17 & 15 & 31 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 8 & 15 \\ 28 & 22 & 19 & 15 & 15 & 26 \end{pmatrix}$.
   Le coefficient a_{11} de cette matrice est 8 : il y adonc 8 chemins de longueur 6 allant de A vers A.

   (b) Ces huit chemins sont :
   - A-E-D-B-F-A
   - A-E-D-C-F-B-A
   - A-E-D-C-D-F-A
   - A-E-D-F-B-F-A
   - A-E-D-F-C-B-A
   - A-E-D-F-C-F-A
   - A-E-D-F-C-D-A
   - A-E-D-A-E-D-A

   (c) Il y a trois chemins allant de A vers A de longueur 8 et passant par tous les sommets : ce sont les chemins AEDFCBA ; AEDCFBA et AEDCBFA.
   Celui qui mène au temps de parcours minimum est AEDCFBA avec 21 minutes (28 minutes pour les deux autres).

II

III Réunion, juin 2007

1. (u_n) est la suite définie par : $u_n = 1 - \dfrac{6}{n-10,5}$.
   On a : $u_{n+1} = 1 - \dfrac{6}{(n+1)-10,5}$.
   Alors : pour tout n :
   $u_{n+1} - u_n = \left[1 - \dfrac{6}{n+1-10,5}\right] - \left[1 - \dfrac{6}{n-10,5}\right] = -\dfrac{6}{n+1-10,5} + \dfrac{6}{n-10,5}$
   $= 6\left(\dfrac{1}{n-10,5} - \dfrac{1}{n-9,5}\right) = 6\left(\dfrac{n-9,5-(n-10,5)}{(n-10,5)(n-9,5)}\right) = \boxed{\dfrac{6}{(n-10,5)(n-9,5)}}$.
   Renseignons un tableau de signes :

n	0		$9,5$		$10,5$		$+\infty$
$n-9,5$		$-$	0	$+$		$+$	
$n-10,5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(n-9,5)(n-10,5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Pour $n \geqslant 11$, $u_{n+1} - u_n$ est positif, donc la suite est croissante, de même que pour $0 \leqslant n < 10$, mais pour $n = 10$, $u_{11} - u_{10} < 0$.
   On en déduit que la suite (u_n) n'est pas monotone.

2. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -0,1u_n$ donc $u_{n+1} = u_n - 0,1u_n = 0,9u_n$.
   La suite (u_n) est**géométrique** de raison $q = 0,9$.

3. On cherche l'intersection du plan et de la droite.
   $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan et à la droite signifie que ses coordonnées vérifient à la fois l'équation du plan et le système d'équations de la droite.
   $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ y=1 \\ z=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1+(1-x)-2=0 \\ y=1 \\ z=1-x \end{cases} \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} 0=0 \\ y=1 \\ z=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=1-x \end{cases}$.
   On retrouve le système correspondant à la droite : l'intersection du plan et de la droite est la droite elle-même, donc **cette droite est incluse dans le plan**.

4. Regardons le degré de chaque sommet :

sommet	A	B	C	D	E
degré	2	3	3	2	2

   La somme des degrés est 12, donc le nombre d'arêtes est 6.
   A et B ne sont pas adjacents, donc le graphes n'est pas complet.
   Le graphe est connexe et a deux sommets de degré impair, donc **il comporte une chaîne eulérienne**.

5. Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 2 % est 1,02.
   Le nombre d'exemplaires vendus lors de la semaine n est u_n, avec $u_1 = 10000$ et $u_{n+1} = 1,02u_n$.
   (u_n) est une suite géométrique de raison $q =$

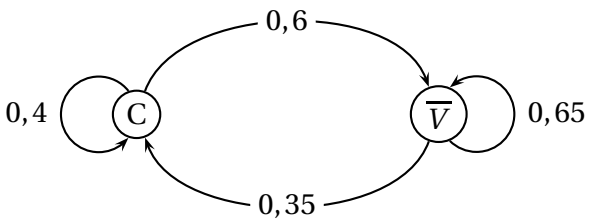
1,02.
Le nombre d'exemplaires vendus au cours des 45 premières semaines est :
$u_1+u_2+\cdots+u_{45}=u_1+u_1q+\cdots+u_1q^{44}=u_1(1+q+\cdots+q^{44})=u_1\times\dfrac{1-q^{45}}{1-q}=10000\times\dfrac{1-1,02^{45}}{1-1,02}\approx$ $\boxed{endtell718927}$.

IV France juin 2006

On a $p_C(V)=0,6$ et $p_V(C)=0,35$.

Première partie :

1. Graphe probabiliste modélisant la situation :



2. La matrice de transition associée à ce graphe est : $M=\begin{pmatrix}0,40 & 0,60\\ 0,35 & 0,65\end{pmatrix}$.

   Soit $P=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ la matrice stable de ce système.
   P est telle que $P=P\times M$.
   $P=PM\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,40 & 0,60\\ 0,35 & 0,65\end{pmatrix}$.
   x et y sont donc solutions du système : $\begin{cases}x=0,4x+0,35y\\ y=0,6x+0,65y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-0,6x+0,35y=0\\ 0,6x-0,35y=0\end{cases}\Leftrightarrow$ $0,6x-0,35y=0$.
   De plus, $x+y=190$.
   On obtient donc le système :
   $\begin{cases}0,6x-0,35y=0\\ x+y=190\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0,6x-0,35y=0\\ y=190-x\end{cases}$ $\begin{cases}0,6x-0\\ y=190\end{cases}$
   $\begin{cases}0,95x=66,5\\ y=190-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=70\\ y=120\end{cases}$
   $\boxed{\text{La matrice stable est donc } P=\begin{pmatrix}70 & 120\end{pmatrix}.}$
   On pouvait aussi calculer $P\times M$ et vérifier que l'on trouvait P.
   À long terme, 70000 personnes de cette ville pratiqueront le co-voiturage et 120000 personnes voyageront seules en voiture.

Deuxième partie

On admet que X_n est la suite définie par : $\begin{cases}X_0=60\\ X_{n+1}=0,05X_n+66,5\end{cases}$.
On pose $U_n=X_n-70$.

1. Pour tout n, $U_{n+1}=X_{n+1}-70=0,05X_n+66,5-70=0,05X_n-3,5=0,05\left(X_n-\dfrac{3,5}{0,05}\right)=0,05\,(X_n-70)=0,05U_n$.
   On en déduit que la suite (U_n) est géométrique de raison $q=0,05$ et de premier terme $U_0=X_0-70=-10$.
2. On en déduit que : $U_n=U_0\times q^n=-10\times 0,05^n$ et $X_n=U_n+70=\boxed{70-10\times 0,05^n}$.
   Pour tout n, $U_n=70-10\times 0,05^n<70$ donc le nombre d'habitants pratiquant le co-voiturage n'atteindra **jamais** la moitié de la population (95 milliers d'habitants).