# TES spécialité : correction du contrôle

## I

$(u_n)$ est arithmétique, de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.
Pour tout $n$, $u_n = u_0 + nr$, donc $u_{12} = 5 + 12 \times 3 = 41$. $\boxed{u_{12} = 41}$.

## II

$(u_n)$ est arithmétique.
$u_4 = 19 \Leftrightarrow u_0 + 4r = 19$.
$u_{15} = 63 \Leftrightarrow u_0 + 15r = 63$.
On a le système : $\left\{\begin{array}{lcll} u_0 + 4r & = & 19 & (1) \\ u_0 + 15r & = & 63 & (2) \end{array}\right.$.
En calculant $(2) - (1)$, on obtient : $15r - 4r = 63 - 19$ soit $11r = 44$ d'où $r = 4$.
Avec (1), on obtient : $u_0 = 19 - 4r = 19 - 4 \times 4 = 3$.
$\boxed{\text{Le premier terme est } u_0 = 3 \text{ et la raison est } r = 4}$.

## III

$(u_n)$ est arithmétique ; $u_0 = 7$ et la raison $r$ vaut 5. La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est la demi-somme des termes extrêmes de cette somme, multipliée par le nombre de termes.
Par conséquent : $u_2 + u_3 + \cdots + u_{12} = (12 - 2 + 1) \times \left(\dfrac{u_2 + u_{12}}{2}\right)$.
$12 - 2 + 1 = 11$ est le nombre de termes.
$u_2 = u_0 + 2r = 7 + 2 \times 5 = 17$ ; $u_{12} = u_0 + 12 \times r = 7 + 12 \times 5 = 67$.
Finalement, $u_2 + \cdots + u_{12} = 11 \times \left(\dfrac{17 + 67}{2}\right) = 11 \times 42 = \boxed{462}$.

## IV

$u_0 = 1$ et, pour tout $n$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

- $u_1 = \dfrac{u_0}{1 + u_0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.
- $u_2 = \dfrac{u_1}{1 + u_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

On a : $\boxed{u_1 = \dfrac{1}{2}}$ et $\boxed{u_2 = \dfrac{1}{3}}$.

## V

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 2$ donc $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2 \geqslant 2 > 0$ (car le carré d'un nombre réel est toujours positif).
Par conséquent : $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n$.
La suite $(u_n)$ est donc croissante.

## VI

Soit $S = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{13}$.
$S$ est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique $(u_n)$, de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 3$.
Si $u_0 = 3$, alors $3^{13} = u_{12}$.
$S = u_0 \times \dfrac{q^{13} - 1}{q - 1} = 3 \times \left(\dfrac{3^{13} - 1}{3 - 1}\right) = \dfrac{3}{2}\left(3^{13} - 1\right)$.
$\boxed{S = \dfrac{3}{2}\left(3^{13} - 1\right) = 2\,391\,483}$.

## VII

On a $u_1 = 100$

1. (a) La somme a augmentée de 5%, plus 20€.
   Par conséquent : $u_{12} = u_1 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 20 = 1,05u < 1 + 20 = 125$ : $\boxed{u_2 = 125}$.

   (b) Pour tout $n$, $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) + 20$ donc $\boxed{u_{n+1} = 1,05u_n + 20}$.

2. Pour tout $n$, on pose $v_n = u_n + 400$.

   (a) $v_1 = u_1 + 400 = 100 + 400 = 500$.

   (b) Pour tout $n$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 400 = 1,05u_n + 20 + 400 = 1,05u_n + 420 = 1,05\left(u_n + \frac{420}{1,05}\right) = 1,05\,(u_n + 400) = 1,05v_n$.
   Par conséquent : $v_{n+1} = 1,05v_n$.
   On en déduit que la suite $(v_n)$ est géométrique, de raison $q = 1,05$ et de premier terme $v_1 = 500$.

   (c) On a alors : $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \boxed{500 \times 1,05^{n-1}}$.
   Alors : $u_n = v_n - 400$ donc $\boxed{u_n = 500 \times 1,05^{n-1} - 400}$.

   (d) $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 1,05$. Le premier terme $v_1 = 500$.
   Cette somme vaut : $v_1 \times \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 500 \times \left(\frac{1,05^n - 1}{1,05 - 1}\right) = 10000 \times \left(1,05^n - 1\right)$.

   (e) La somme reçue par Marc est : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
   $S = (v_1 - 400) + (v_2 - 400) + \cdots + (v_n - 400) = (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) - 400n$.
   On en déduit : $\boxed{S = 10\,000 \times \left(1,05^n - 1\right) - 400n}$.
   Il faut que cette somme soit supérieure à 10 000.
   À la calculatrice, on trouve qu'il faut que $\boxed{n \geqslant 22}$.

## VIII

On a $C_0 = 2000$.

1. (a) Un taux d'intérêts composés de 3,5% correspond à un coefficient multiplicateur de 1,035.
   Le capital disponible le 1er janvier 2004 est $C_1$. Or $C_1 = 1,035C_0 + 700 = 1,035 \times 2000 + 700 = 2770$.

   (b) De même, pour tout $n$, on a : $C_{n+1} = C_n \times \left(1 + \frac{3,5}{100}\right) + 700 = \boxed{1,035C_n + 700}$.

2. Pour tout $n$, on pose : $u_n + C_n + 20\,000$.

   (a) Pour tout $n$n, on a : $u_{n+1} = C_{n+1} + 20\,000 = (1,035C_n + 700) + 20\,000 = 1,035C_n + 20\,700 = 1,035\left(C_n + \frac{20\,700}{1,035}\right) = 1,035\,(C_n + 20\,000) = 1,035u_n$.
   Pour tout $n$ : $u_{n+1} = 1,035u_n$.
   La suite $(u_n)$ est donc géométrique de raison $q = 1,035$ et de premier terme $u_0 = C_0 + 20\,000 = 22\,000$.

   (b) Alors, pour tout $n$ : $u_n = u_0 q^n = \boxed{22\,000 \times 1,035^n}$.

   (c) On en déduit que : $C_n = u_n - 20000 = \boxed{22\,000 \times 1,035^n - 20\,000}$.

   (d) Le 1er janvier 2008, le capital disponible est $C_5$ (2008=2003+5).
   $C_5 = 22\,000 \times 1,035^5 - 20\,000 \approx 6129,10$€.

3. Il paiera la somme de 6 000 €en quatre mensualités qui seront les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   Soit $u_0$ le montant de la première mensualité et $r = 800$ la raison de cette suite.
   $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 4 \times \frac{u_0 + u_3}{2} = 2\,(u_0 + u_3) = 2\,(u_0 + u_0 + 3r) = 2\,(2u_0 + 2400)$.
   On obtient : $4u_0 + 4\,800 = 6\,000$ d'où $4u_0 = 1\,200$ qui donne $u_0 = 300$.
   $\boxed{\text{Les montants des quatre mensualités seront de 300 €, 1 000 €, 1 800 € et 2 600 €}}$.