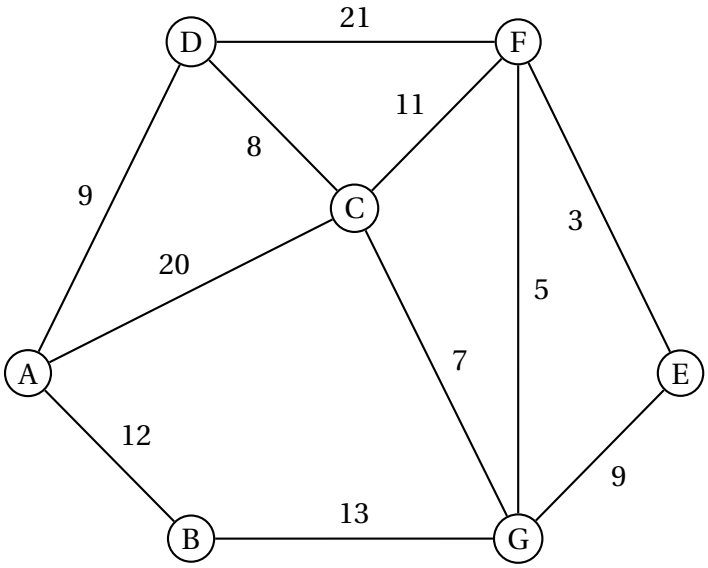
Exercices de révision (10 juin 2010)

I

Des touristes sont logés dans un hôtel noté A. un guide fait visiter six sites touristiques notés B, C, D, E, F et G. Les tronçons de route qu'il peut emprunter sont représentés par le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres des différents tronçons.



1. (a) À partir de l'hôtel, le guide peut-il prendre tous les tronçons de route en passant une fois et une sule fois sur chacun d'eux ? Justifier la réponse.
   (b) Même question s'il doit obligatoirement terminer son circuit à l'hôtel.
2. Déterminer le plus court chemin menant de l'hôtel A au site E. Justifier la réponse.

II Amérique du Nord juin 2010

Pendant ses vacances d'été, Alex a la possibilité d'aller se baigner tous les jours. S'il va se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de $0,7$.

S'il ne va pas se baigner un jour, la probabilité qu'il aille se baigner le lendemain est de $0,9$. Le premier jour de ses vacances, Alex va se baigner.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- a_n la probabilité qu'Alex n'aille pas se baigner le n-ième jour.
- b_n la probabilité qu'Alex aille se baigner le n-ième jour.
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le n-ième jour.

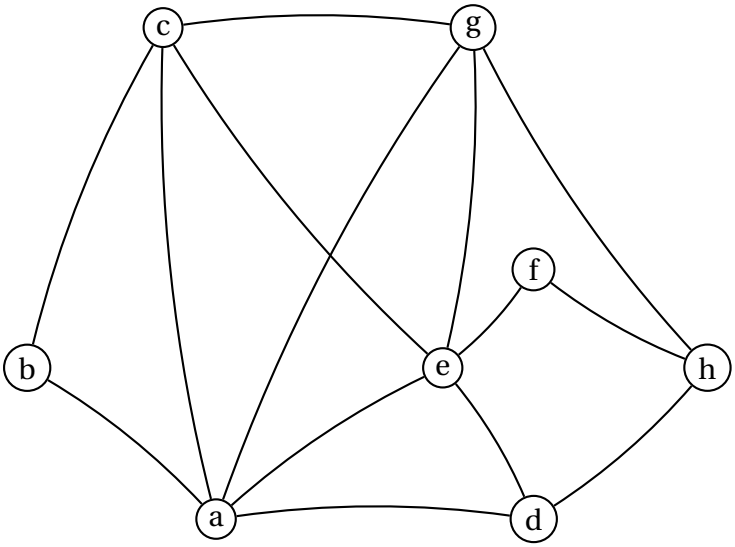
On a donc $P_1 = (0 \quad 1)$

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (B représentant l'état « Alex va se baigner »).
   (b) Soit M la matrice de transition associée à ce graphe. Recopier et compléter $M = \begin{pmatrix} 0,1 & \dots \\ \dots & 0,7 \end{pmatrix}$
2. Calculer P_3, P_{10} et P_{20}. Quelle conjecture peut-on faire ?
3. (a) Montrer que pour tout entier n non nul, $b_{n+1} = 0,9a_n + 0,7b_n$.
   (b) En déduire que : $b_{n+1} = -0,2b_n + 0,9$.
4. On considère la suite u définie pour tout entier n non nul par $u_n = b_n - 0,75$.
   (a) Montrer que u est une suite géométrique de raison $-0,2$; on précisera son premier terme.
   (b) Déterminer la limite de la suite u.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.
5. On suppose dans cette question que le premier jour de ses vacances, Alex ne va pas se baigner. Quelle est la probabilité qu'il aille se baigner le 20e jour de ses vacances ?

III Réunion juin 2004

Partie A

On note G le graphe représenté ci-dessous et M sa matrice obtenue en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice M^3 est également donnée.



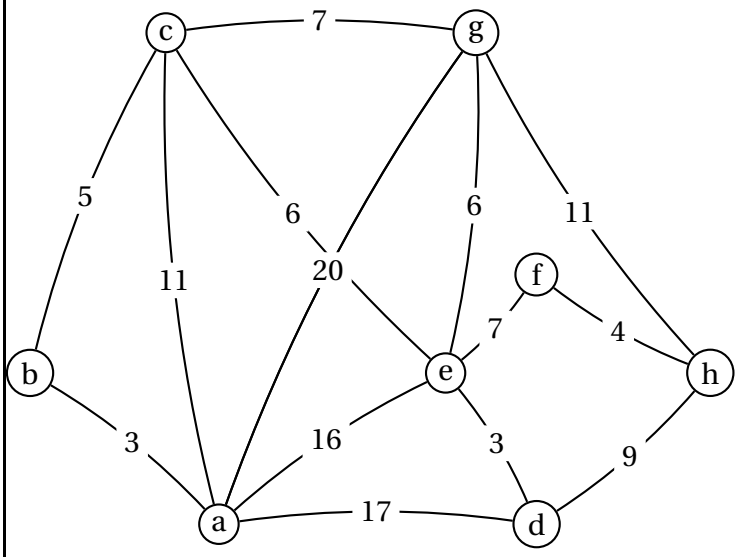
$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. L'ordre du graphe est égal au plus grand des degrés des sommets.
2. Le graphe G contient un sous-graphe complet d'ordre 3.
3. Les sommets de G peuvent être coloriés avec trois couleurs sans que deux sommets adjacents soient de même couleur.
4. Il est possible de parcourir ce graphe en passant une fois et une seule par chaque arête.
5. Il existe au moins un chemin de longueur 3 qui relie chaque sommet à chacun des sept autres sommets du graphe.
6. Il y a 72 chemins de longueur 3 qui relient le sommet e à chacun des huit sommets du graphe.

Partie B

Le graphe précédent représente un réseau de lignes d'autobus. Les sommets du graphe désignent les arrêts. Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minutes, entre deux arrêts (correspondances comprises).



Déterminer, à l'aide d'un algorithme, la durée minimum pour aller de l'arrêt a à l'arrêt h et donner ce trajet.

IV Asie juin 2005

Pour fabriquer un alliage une usine utilise deux métaux A et B en quantités x et y exprimées en tonnes. Le coût de production qui en résulte, exprimé en milliers d'euros, est donné par la formule :

$$C(x, y) = 2x + 0,5y^2 + 4.$$

L'ANNEXE 1 (à rendre avec la copie) comporte deux figures.

- La figure 1 représente la surface d'équation $z = C(x\,;\,y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 20$ et $0 \leqslant y \leqslant 12$.
- La figure 2 représente les courbes de niveau de cette surface pour z variant dc 20 en 20.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

Cette partie est un questionnaire choix multiples constitué de deux questions, chacune comportant quatre propositions de réponse dont une seule est exacte.
Une bonne réponse rapportera 0,5 *point.*
Une mauvaise réponse sera pénalisée de 0,25 *point.*
Si le total des points de cette partie est négatif, la note attribuée sera 0.
Les réponses seront indiquées sur la copie. Aucune justification n'est demandée.

1. Lequel des points donnés ci-dessous est un point de la surface d'équation $z = C(x\,;\ y)$?

   a M(13 ; 9 ; 60) **b** N(12 ; 4 ; 40) **c** R(12 ;.8 ; 60) **d** S(15 ; 4 ; 40)

2. La courbe de niveau $z = 20$ est :

   a une parabole **b** une droite **c** une hyperbole **d** autre réponse

Partie 2

Les métaux A et B sont achetés respectivement $0,5$ et 1 millier d'euros la tonne. L'entreprise affecte 11 milliers d'euros à l'achat des métaux.

1. Un exemple :

   Si l'entreprise achète 4 tonnes de métal A, combien de tonnes de métal B achète-t-elle ?

2. Cas général

   Soit x la quantité de métal A et y la quantité de métal achetées.

   Montrer que x et y sont liées par la relation $x + 2y = 22$.

3. (a) Tracer sur la figure 2 de l'ANNEXE 1 l'ensemble des points dont l'équation est

$$x + 2y = 22.$$

   (b) En déduire, graphiquement le coût minimum de production des alliages pour un investissement de 11 milliers d'euros, et les quantités.correspondantes de métaux A et B achetées.

ANNEXE 1

Figure 1 : surface d'équation $z = C(x\,;\ y)$

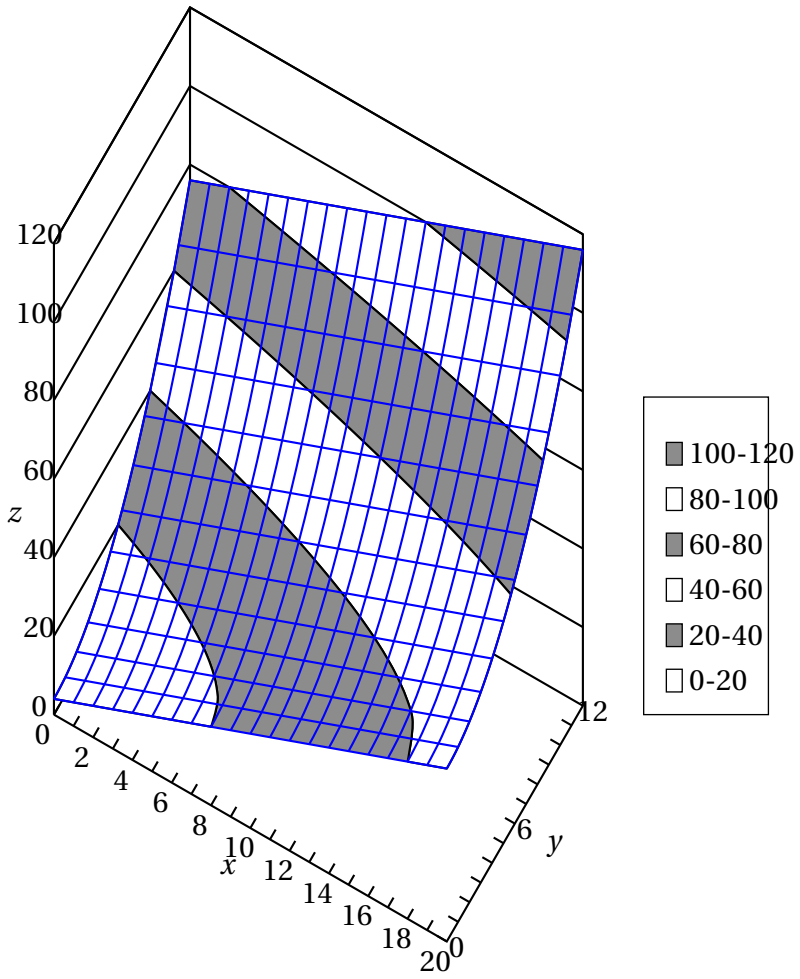
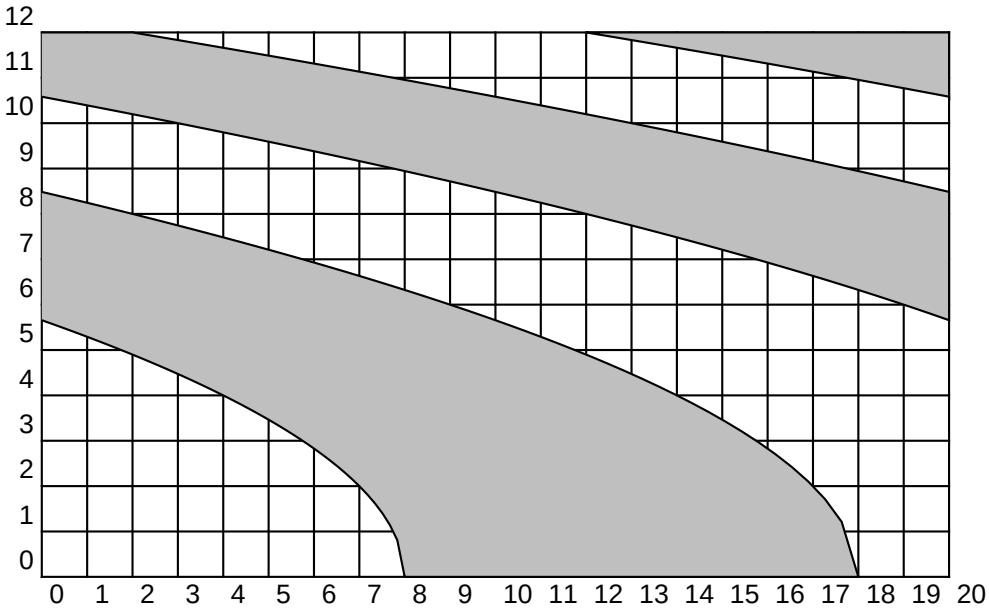



Figure 2 : courbes de niveau