TES (spécialité) : devoir n° 1

I

Le système bancaire, recevant un dépôt initial $S_0 = 50\,000$ €, en remet 80% en circulation sous forme de prêts et en conserve 20% (le montant de cette réserve sera noté E_0).
L'activité économique se traduit par le fait que les sommes prêtées reviennent dans le système où elles apparaissent comme un nouveau dépôt S_1, dépôt qui sera traité selon le même processus (80% remis en circulation, 20 % mis en réserve). Le dépôt initial de 50 000 € engendre ainsi une suite (S_n) de dépôts successifs et une suite (E_n) de mises en réserve.

1. (a) Calculez S_1, S_2, E_0, E_1 et E_2.
   (b) Exprimez S_n à l'aide de S_{n-1}.
   (c) Déduisez-en les expressions de S_n et de E_n en fonction de n.
2. On fait le bilan après que la banque a reçu les n premiers dépôts $S_0,\ldots,S_{n-1}$ (et a procédé aux mises en réserve correspondantes).
   (a) Calculez en fonction de n la somme totale D_n que la banque a reçue.
   (b) Calculez la somme totale R_n que la banque a inscrite en réserve.
3. (a) Montrez que la limite R de la suite (R_n) est égale au dépôt initial S_0.
   (b) Déterminez la limite D de la suite (D_n).
   Quelle est l'interprétation de la différence $D - S_0$?

II

Lors d'un contrôle de mathématiques, le programme comporte huit chapitres dont certains sont des prérequis pour la compréhension de certains autres.

chapitre	1	2	3	4	5	6	7	8
chapitres prérequis		1	1 ; 2	1	1 ; 2		4 ; 6	

1. Représenter la situaton à l'aide d'un graphe orienté d'ordre 8 dans lequel une flèche de i à j signifie que le chapitre i est un prérequis pour le chapitre j.
2. On note A la matrice associée à ce graphe. Sans expliciter A, expliquez pourquoi la ligne de A dont la somme es termes est la plus grande correspond au chapitre que les élèves doivent réviser en priorité.

III

On considère quatre villes V_1, V_2, V_3 et V_4 dans un pays où le trafic aérien est très réduit ; il existe seulement un vol direct de V_1 vers V_2 et vers V_4, de V_2 vers V_3, de V_3 vers V_1 et vers V_4, de V_4 vers V_2.

1. Représentez cette situation par un graphe.
2. Vérifiez qu'il existe au moins un vol de chaque ville V_i vers chaque ville V_j $(i \neq j)$; comportant au plus deux escales.
3. (a) Écrivez la matrice M associée à ce graphe.
   (b) Calculez M^2 et M^3.
   (c) Retrouvez alors le résultat de la question (c).

IV Pondichéry avril 2002

Soit M la matrice carrée d'ordre 5 :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Construire le graphe associé à M. On appelllera A, B, C, D, E les sommets.
   Ce graphe est-il connexe ? Est-il complet ?
2. Existe-t-il une chaîne eulérienne ?
   Existe-t-il un cycle eulérien ?
3. (**à ne pas faire**) Donner un encadrement du nombre chromatique du graphe et déterminer sa valeur.
4. (a) Calculer M^2.
   (b) Combien y-a-t-il de chaînes de longueur 2 entre A et B ? Entre C et A ?
5. Combien y-a-t-il de chaînes de longueur 3 entre B et D ?