Généralités sur les graphes

Table des matières

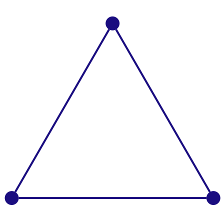
I Vocabulaire de base

Vocabulaire

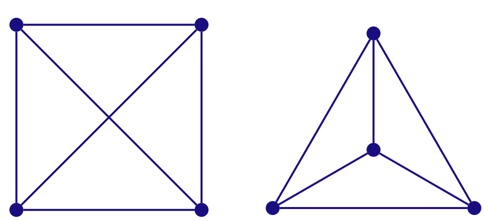
- Un **graphe** est un ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.
- Un **graphe orienté** est un graphe dont les lignes sont fléchées ou orientées.
- Un **sommet** est un point d'un graphe (orienté ou non).
- **L'ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets.
- Une **arête** est une ligne reliant deux sommets, appelés aussi extrémités de l'arête.
- Une **boucle** est une arête dont les extrémités sont confondues.
- Un graphe est **simple** si le graphe est sans boucle et, entre deux sommets, il y a au plus une arête.
- Deux sommets sont **adjacents** s'ils sont reliés par une arête.
- Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité; attention, dans le cas d'une boucle, celles est compté deux fois.

II Exemples

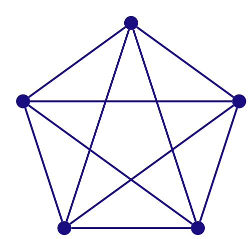
Exemple 1 : graphes complets K_n simples d'ordre $n \geqslant 1$ ($3 \leqslant n \leqslant 5$)



K_3



Deux représentations du K_4

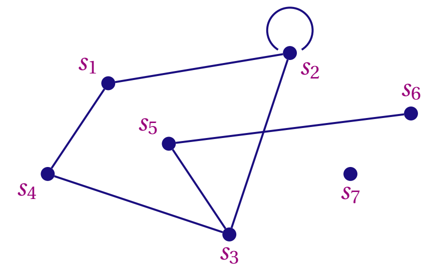


K_5

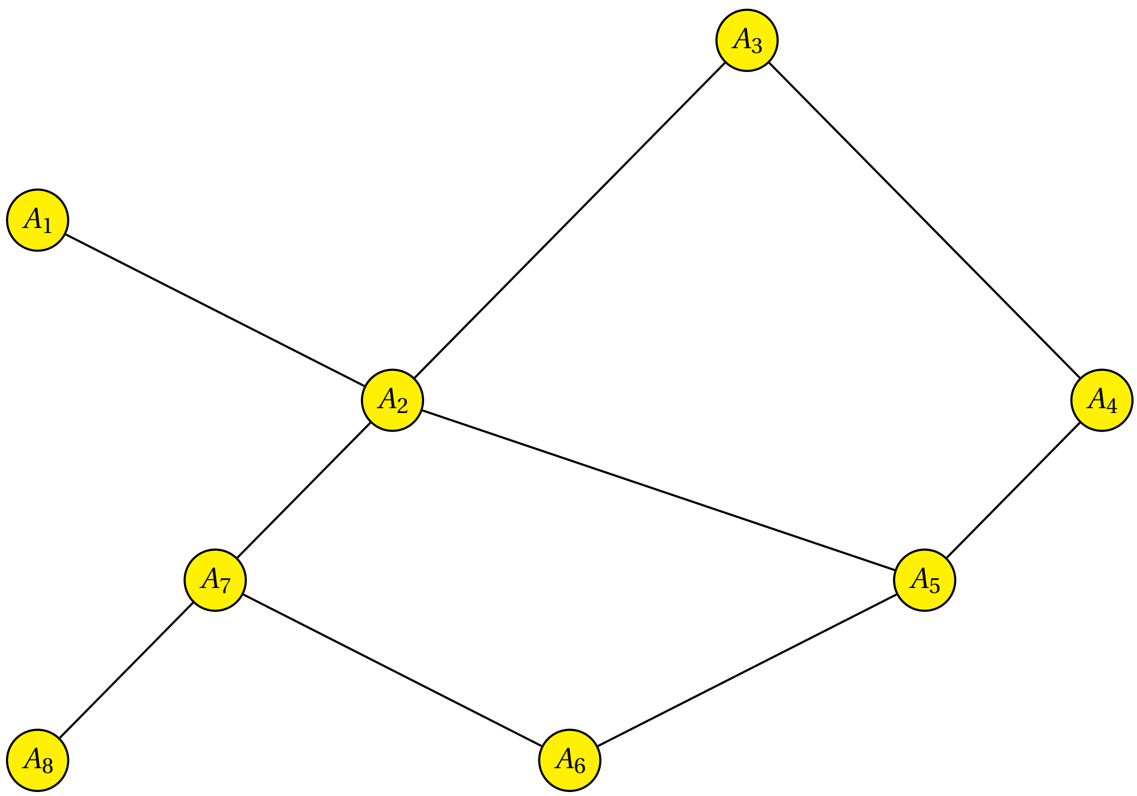
Exemple 2

Dans le graphe ci-contre, les degrés des sommets sont :

Sommets	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
Degrés	2	4	2	2	2	1	0

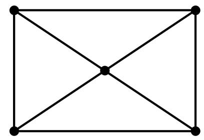


Exemple 3



Ce graphe est d'ordre 8 ; le sommet A_2 est de degré 4. Les sommets A_1 et A_3 ne sont pas adjacents.

Exemple 4



Ce graphe est complet car tous les sommets sont adjacents.

Théorème

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes. C'est donc un nombre pair.

Démonstration :

Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité.

Exemple d'un réseau téléphonique :

Dans une « toute petite ville », il y a 15 appareils téléphoniques. Est-il possible de les relier par des fils téléphoniques pour que chaque appareil soit relié avec exactement 5 autres ?

Solution : On construit un graphe, ou du moins on imagine un graphe correspondant au problème : les sommets sont les appareils et les arêtes sont les fils ; les sommets ont tous un degré impair et il y en a un nombre impair donc la somme de tous les degrés est impaire : c'est impossible.

Vocabulaire :

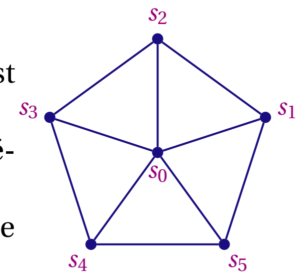
- Un graphe est dit **complet** lorsque toutes les paires de sommets sont des paires de sommets adjacents.
- On appelle **sous graphe** le graphe composé de certains sommets et des arêtes qui relient ces sommets.
- Deux sommets d'un graphe étant choisis, on appelle **chaîne** une suite d'arêtes mises bout à bout reliant ces deux sommets.
  Si le graphe est orienté, la chaîne est orientée.
- Une chaîne dont tous les sommets (sauf peut-être les extrémités) sont distincts est une *chaîne élémentaire*.
- La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes constituant la chaîne. (Cela n'a rien à voir avec une longueur réelle !)
- Un cycle dans un graphe est une chaîne dont les extrémités coïncident, toutes les arêtes étant distinctes.
- Un graphe est **connexe** s'il existe toujours une chaîne reliant deux sommets distincts du graphe.

Exemple
Dans le graphe ci-contre :

— La chaîne $\{s_0\,;\,s_1\,;\,s_0\,;\,s_2\,;\,s_0\,;\,s_3\,;\,s_0\,;\,s_4\,;\,s_0\,;\,s_5\,;\,s_0\}$ est une chaîne fermée de longueur 10.

— La chaîne $\{s_1\,;\,s_2\,;\,s_3\,;\,s_0\,;\,s_4\,;\,s_5\}$ est une chaîne élémentaire de longueur 5.

— La chaîne $\{s_1\,;\,s_2\,;\,s_0\,;\,s_3\,;\,s_4\,;\,s_0\,;\,s_5\,;\,s_1\}$ est un cycle de longueur 7.



Théorème d'Euler

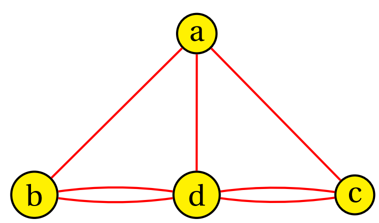
G étant un graphe connexe (d'un seul tenant), les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- Tous les sommets de G sont de degré pair
- G admet un cycle eulérien.

G étant un graphe connexe (d'un seul tenant), les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- Deux sommets et deux seulement A et B de G sont de degré impair.
- G admet une chaîne eulérienne d'extrémités A et B.

Exemple 3
Le problème des ponts de Königsberg se dessine par le graphe suivant :



Ce graphe n'est pas simple.
Le degré de a est 3; celui de b est 3 comme celui de c; celui de d est 4.

sommet	a	b	c	d
degré	3	3	3	4

Il y a des sommets de degré impair , donc il n'y aucun cycle eulérien; aucun trajet ne permet de revenir à son point de départ en ne passant qu'une fois pas chaque pont.
Remarque : il n'y a pas non plus de chaîne eulérienne.

III Matrices d'adjacence

Définition

On appelle matrice de dimensions $(i\ ;\ j)$ un tableau de nombres de i lignes et j colonnes.
On note a_{ij} le terme à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

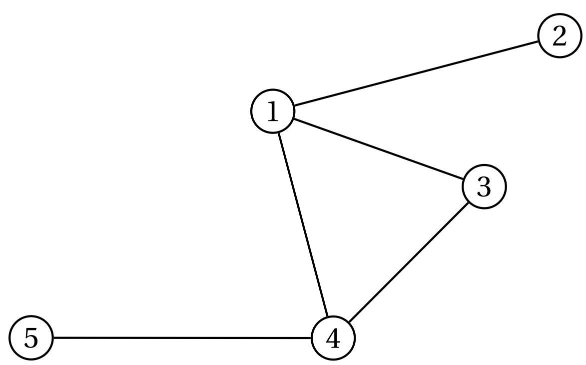
Exemples :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice de de deux lignes et trois colonnes.
2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 45 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice d'une seule ligne ; on dit que c'est une matrice ligne.
3. $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Définition

On considère un graphe ; on note a_{ij} le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.

Exemple :



La matrice associée à ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que cette matrice est symétrique (la ligne i est égale à la colonne i) car une arête allant de i à j est aussi une arête allant de j à i.