Graphes probabilistes : exemple introductif

I Une évolution de population

Deux villes X et Y totalisent à elles deux une population d'un million d'habitants.
La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires.
20 % des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5 % des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.
À l'année 0, un quart des habitants sont en X.

On se pose les questions suivantes :

— Que se serait-il passé au bout de 1, 2, 5, 10, 30, 40 ans si 99 % des habitants avaient été initialement en X (ou en Y) ?

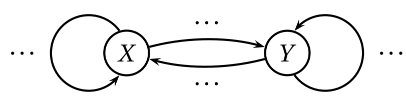
— Que se serait-il passé au bout de 1, 2, 5, 10, 30, 40 ans si la population avait été également répartie entre les deux villes en l'année zéro ?

— Comment sera répartie la population, entre les villes X et Y au bout de 1, 2, 5, 10, 30, 40 ans ?

I.1 Une solution

1. L'énoncé nous dit que 95 % des gens qui sont en X y restent, 5 % partent en Y, et que 80 % des gens qui sont en Y y restent, 20 % partant en X.
   En appelant X_n la population de la ville X à l'année n et Y_n celle de Y, expliquer pourquoi on peut représenter l'évolution par le système d'équations :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} X_{n+1} & = & 0,95X_n + 0,2Y_n \\ Y_{n+1} & = & 0,05X_n + 0,8Y_n \end{array}\right.$$

2. On peut représenter la situation par le graphe suivant, où l'on a marqué, sur chaque arête joignant le sommet X au sommet Y, la proportion de population qui passe à chaque étape de X à Y. Remarquons que, puisque la population ne peut disparaître ou apparaître, la somme des coefficients sur toutes les arêtes quittant un sommet doit être 1 :

   Si l'on note, pour tout entier naturel n, $P_n = \begin{pmatrix} X_n & Y_n \end{pmatrix}$ le vecteur ligne qui décrit la population de X et de Y au bout de n années, déterminer la matrice M telle que le système d'équations d'évolution trouvée précédemment peut se réécrire :
   $$P_{n+1} = P_n \times M$$
   On appelera M : *matrice de transition du système.*

   Attention ! Le produit ne se fait pas à droite de la matrice, comme on en a l'habitude, mais **à gauche**. Cela présente l'avantage de garder l'écriture des vecteurs en ligne, et c'est l'habitude en probabilité.

   (a) Exprimer P_1 et P_2 en fonction de M et de P_0.
   Généraliser pour obtenir P_n en fonction de P_0, de M et de n.

   (b) à l'aide de cette formule, répondre aux questions qu'on se pose dans le problème.

3. (a) Que constate-t-on, quand n devient grand, quelle que soit la répartition de population à l'année 0 ?

   (b) On suppose que $P_0 = \begin{pmatrix} 800\,000 & 200\,000 \end{pmatrix}$.
   Calculer P_1, P_2, P_3, etc.
   Comment peut-on alors qualifier cette répartition, cet état ?

   (c) On a vu que, quelle que soit la population de départ, le système converge vers cet état. Il peut donc être intéressant d'être en mesure de le déterminer dès le départ.
   On admet qu'une telle répartition existe et on appelle x la population de X et y celle de Y pour lesquelles la population de chaque ville est la même chaque année.

   i. Que devient le système d'équations d'évolution si $\begin{pmatrix} X_n & Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$?

   ii. En déduire que x et y sont solutions de : $\left\{\begin{array}{lcl} 0,05x & = & 0,2y \\ x+y & = & 1\,000\,000 \end{array}\right.$

   iii. Déterminer alors x et y.