Matrices

Table des matières

I Matrices et opérations 1
II Multiplication 2
III Inverse d'une matrice 2

I Matrices et opérations

Définition (rappel)

Une matrice M est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes. On dit qu'elle est de dimension $(n\ ,\ p)$.
On peut aussi noter la matrice $\left(a_{ij}\right)$ où a_{ij} désigne le coefficient situé à la i-ème ligne et la j-ième colonne.

$$\text{On a : } M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Vocabulaire

- Lorsque $n = p$. on dit que M est une matrice carrée d'ordre n.
- Lorsque $p = l$, on dit que M est une matrice colonne.
- Lorsque $n = l$, on dit que M est une matrice ligne.

Définition

Dire que deux matrices sont égales signifie que :

- elles ont la même dimension ;
- les nombres qui occupent la même position sont deux à deux égaux.

Addition, soustraction de deux matrices

A et B sont deux matrices de **même** dimension. La somme (respectivement la différence) des matrices A et B, notée $A+B$ (respectivement $(A-B)$, est la matrice obtenue en additionnant (respectivement en soustrayant) deux à deux les coefficients qui occupent la **même** position.

Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Le produit d'une matrice A par un nombre réel k est la matrice, notée kA, obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k.

II Multiplication

1. **Multiplication d'une matrice par une matrice colonne :** Le produit d'une matrice de dimension $(n\,,\ p)$ par une matrice colonne à p lignes est une matrice colonne à n lignes.
   On multiplie chaque nombre de la ligne i par chaque nombre de la matrice colonne et on en fait la somme pour obtenir la line i de la matrice colonne.

   Exemple : $\begin{pmatrix}2&4&5\\3&1&6\\7&2&9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10&4&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times10+4\times4+5\times20\\3\times10+1\times4+6\times20\\7\times10+2\times4+9\times20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}136\\154\\258\end{pmatrix}$

2. **Multiplication de deux matrices** Le produit de deux matrices de dimensions respectives $(n\,;\ p)$ et $(p\,;\ q)$ est une matrice de dimensions $(n\,;\ q)$.
   Le terme a_{ij} de la matrice $A\times B$ s'obtient en multipliant la ligne i de A par la colonne j de B.

   Exemple : $\begin{pmatrix}2&4\\-3&1\\1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5&3\\10&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times5+4\times10&2\times3+4\times(-5)\\-3\times5+1\times10&-3\times3+1\times(-5)\\1\times5+2\times10&1\times3+2\times(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50&-14\\-5&-14\\25&-7\end{pmatrix}$

Remarque : on peut calculer le produit de deux matrices à la calculatrice !

Remarque : pour deux matrices A et B, le produit $A\times B$ peut exister, mais pas le produit $B\times A$ et même si les deux produits existent, $A\times B$ et $B\times A$ ne sont pas toujours égaux.

Remarque : Par analogie avec les nombres, si A est une matrice, on note $A^2=A\times A$ et plus généralement, $A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{ termes}}$

III Inverse d'une matrice

Définition

Soit n un entier naturel avec $n\geqslant 2$.
On appelle matrice identité I_n la matrice carrée d'ordre n qui contient des 1 sur la diagonale et 0 ailleurs.

Exemples : $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Propriété

Pour toute matrice carrée A d'ordre n, $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n.
Lorsqu'il existe une matrice carrée A' d'ordre n telle que $A' \times A = I_n$, on dit que A' est la matrice inverse de A et on écrit

Remarque : si la matrice inverse A^{-1} de A esiste, celle-ci est unique et $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.

Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que sa matrice inverse A^{-1} existe.
Le système d'équations linéaires dont l'écriture matricielle est $A \times X = B$ a pour solution $B = A^{-1} \times B$.