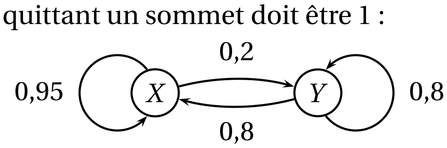
Graphes probabilistes : correction de l'exemple introductif

Une évolution de population

Deux villes X et Y totalisent à elles deux une population d'un million d'habitants.
La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires.
20 % des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5 % des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.
À l'année 0, un quart des habitants sont en X.

.1 Une solution

1. L'énoncé nous dit que 95 % des gens qui sont en X y restent, 5 % partent en Y, et que 80 % des gens qui sont en Y y restent, 20 % partant en X.
   On appelle X_n la population de la ville X à l'année n et Y_n celle de Y.
   On en déduit :
   $$\begin{cases} X_{n+1} = 0,95X_n + 0,2Y_n \\ Y_{n+1} = 0,05X_n + 0,8Y_n \end{cases}$$
2. On peut représenter la situation par le graphe suivant, où l'on a marqué, sur chaque arête joignant le sommet X au sommet Y, la proportion de population qui passe à chaque étape de X à Y. Remarquons que, puisque la population ne peut disparaître ou apparaître, la somme des coefficients sur toutes les arêtes quittant un sommet doit être 1 :



   On note, pour tout entier naturel n, $P_n = \begin{pmatrix} X_n & Y_n \end{pmatrix}$ le vecteur ligne qui décrit la population de X et de Y au bout de n années.
   On note M la matrice telle que le système d'équations d'évolution trouvée précédemment peut se réécrire :
   $$P_{n+1} = P_n \times M$$
   On a $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ (matrice de transition).
   (a) On en déduit $P_1 = 1P_0 \times M$, $P_2 = P_1 \times M = P_0 \times M^2$. En généralisant : $P_n = P_0 \times M^n$.
   (b) Alors :
   - $P_1 \approx \begin{pmatrix} 942\,500 & 57\,500 \end{pmatrix}$
   - $P_2 \approx \begin{pmatrix} 906\,875 & 93\,125 \end{pmatrix}$
   - $P_5 \approx \begin{pmatrix} 845\,087{,}890\,625 & 154\,912{,}109\,375 \end{pmatrix}$
   - $P_{10} \approx \begin{pmatrix} 810\,699{,}567\,795 & 189\,300{,}432\,205 \end{pmatrix}$
   - $P_{30} \approx \begin{pmatrix} 800\,033{,}930\,597 & 199\,966{,}069\,403 \end{pmatrix}$
   - $P_{40} \approx \begin{pmatrix} 800\,001{,}910\,751 & 199\,998{,}089\,249 \end{pmatrix}$
   - $P_{50} \approx \begin{pmatrix} 7928001,11678 & 1981998,88321 \end{pmatrix}$
3. **Deuxième cas** : $P_0 = \begin{pmatrix} 500\,000 & 500\,000 \end{pmatrix}$
   - $P_1 \approx \begin{pmatrix} 4850000 & 650000 \end{pmatrix}$
   - $P_2 \approx \begin{pmatrix} 4737500 & 762500 \end{pmatrix}$
   - $P_5 \approx \begin{pmatrix} 906875 & 93125 \end{pmatrix}$
   - $P_{10} \approx \begin{pmatrix} 4\,542\,382{,}8125 & 957\,617{,}1875 \end{pmatrix}$
   - $P_{40} \approx \begin{pmatrix} 4\,433\,788{,}10883 & 1\,066\,211{,}89117 \end{pmatrix}$
   - $P_{50} \approx \begin{pmatrix} 4\,400\,000{,}33979 & 1\,099\,999{,}66021 \end{pmatrix}$
4. (a) On constate que la matrice P_n semble converger vers la matrice $\begin{pmatrix} 800\,000 & 200\,000 \end{pmatrix}$
   (b) On suppose que $P_0 = \begin{pmatrix} 800\,000 & 200\,000 \end{pmatrix}$.
   On constate que, pour tout n, $P_n = P_0$.

   On dit qu'on a une répartition stable (état syable).
   (c) On a vu que, quelle que soit la population de départ, le système converge vers cet état. Il peut donc être intéressant d'être en mesure de le déterminer dès le départ.
   On admet qu'une telle répartition existe et on appelle x la population de X et y celle de Y pour lesquelles la population de chaque ville est la même chaque année.
   i. Si $\begin{pmatrix} X_n & Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} X_{n+1} & Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n & Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.
   ii. $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}95x + 0{,}2y \\ y = 0{,}05x + 0{,}8y \\ x + y = 1\,000\,000 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}05x = 0{,}2y \\ 0{,}2y = 0{,}05x \\ x + y = 1\,000\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x + y = 1\,000\,000 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 800\,000 \\ y = 200\,000 \end{cases}$$
   iii. L'état stable est $\begin{pmatrix} 800\,000 & 200\,000 \end{pmatrix}$.