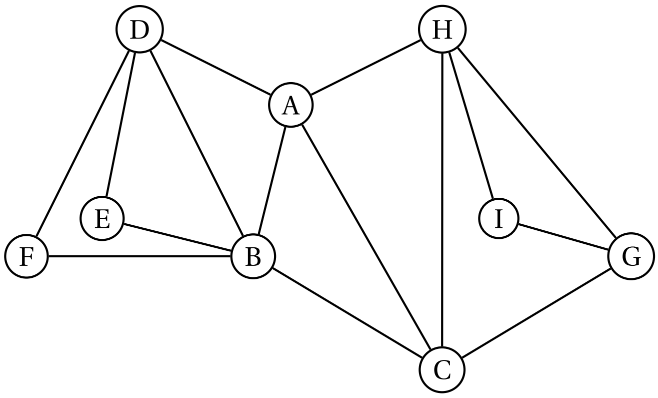
# Spécialité TES : correction du devoir sur feuille nº 1

## I

### Partie A : étude d'un graphe

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous.




1. (a) Le graphe $\mathscr{G}$ n'est pas complet car il y a des sommets non adjacents, comme D et C ou C et I .

   (b) Le graphe $\mathscr{G}$ est connexe est chaque coupe de sommets est relié par une chaîne.

2. (a)

| Sommet | A | B | C | S | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 4 | 5 | 4 | 4 | 2 | 2 | 3 | 4 | 2 |

   (b) Le graphe est connexe et il existe deux sommets et deux seulement, qui ont un degré impair ; ce sont B et G.
   Il existe donc une chaîne eulérienne entre B et G.
   La somme des degrés est 30 ; le nombre d'arêtes de la chaîne doit être la moitié de 30, donc 15.
   Cette chaîne est par exemple : B-F-D-E-B-D-A-B-C-A-H-C-G-H-I-G

3. (a) La matrice d'adjacence du graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

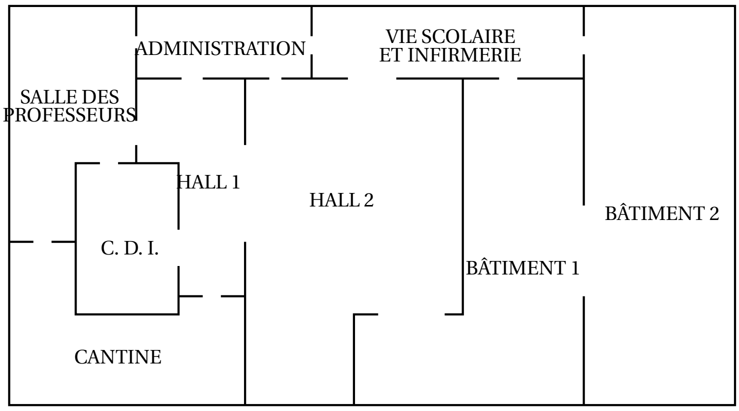
   (b) On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$M^3 = M \times M^2 = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4&2&2&1&2&2&2&1&1\\ 2&5&1&3&1&1&1&2&0\\ 2&1&4&2&1&1&1&2&2\\ 1&3&2&4&1&1&0&1&0\\ 2&1&1&1&2&2&0&0&0\\ 2&1&1&1&2&2&0&0&0\\ 2&1&1&0&0&0&3&2&1\\ 1&2&2&1&0&0&2&4&1\\ 1&0&2&0&0&0&1&1&2 \end{pmatrix}$$

Le coefficient de la septième ligne et quatrième colonne de $M^3$ s'obtient en multipliant la ligne par la colonne 4 : on obtient : $a_{7\,;\,4} = 0\times1+0\times3+1\times2+0\times4+0\times1+0\times2+0\times0+1\times0+1\times1+1\times0 = \boxed{3}$.

### Partie B : Applications

On donne ci-dessous le plan simplifié d'un lycée




1. Le graphe $\mathcal{G}$ donné en partie A modélise cette situation.
   Compléter le tableau suivant :

| Sommet du graphe $\mathcal{G}$ | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lieu correspondant dans le lycée | Adm | Hall 1 | Hall 2 | S.d.P | CDI | cantine | Bât 1 | VS | Bât 2 |

2. Le nombre de chemins en trois étapes entre la salle des professeurs et le bâtiment 1 est le nombre de chemins de longueur 3 entre les sommets G et B : c'est le coefficient $a_{7;4}$ de la matrice $M^3$. Ce nombre est 3.
   Les chemins possibles sont :
   Bâtiment 1-Vie scolaire-Administration-Salle des professeurs
   Bâtiment 1-Haùù 2-Administration-Salle des professeurs
   Bâtiment 1-Hall 2-Hall 1-Salle des professeurs
3. D'après la partie A, il est possible de visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux en allant de B (hall 1) vers G (bâtmient 1)

## II

L'entreprise Ultra-Eau fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

| Nombre de recharges en milliers | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| Coût total annuel de production en centaines d'euros | 11 | 27,4 | 83 |

Le coût total de production est modélisé par une fonction $C$ définie pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par : $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10$ $\quad a, b$ et $c$ sont des nombres réels.

Lorsque le nombre $x$ désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

1. On doit avoir $C(1) = 11$ donc $a+b+c+1 = 11$ d'où $a+b+c = 10$.
   De même $C(3) = 27,4$ donne $27a+9b+c+10 = 27,4$ d'où $27a+9b+c = 17,4$
   $C(5) = 83$ donne $125a+25b+5c+10 = 83$ d'où $125a+25b+5c = 73$.
   On en déduit que a, b et c sont solutions du système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 1 \\ 27a+9b+3c & = & 17,4 \\ 125a+25b+5c & = & 73 \end{array}\right.$$

2. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

   (a) On appelle $M$ la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 25 & 5 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 17,4 \\ 73 \end{pmatrix}$.

   Le système s'écrit alors $MX = Y$.

   (b) On admet que la matrice $M$ est inversible. En multipliant à gauche par $M^{-1}$, on obtient $M^{-1}MX = M^{-1}Y$ donc $IX = M^{-1}Y$ d'où $\boxed{X = M^{-1}Y}$.

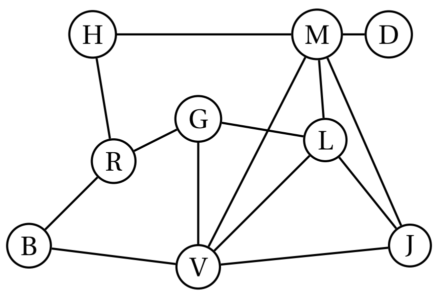
   A la calculatrice, on trouve $X = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

   Le coût de production se calcule avec la fonction $\boxed{C(x) = 0,5x^3 + 0,4x^2 + 0,1x + 10}$

3. 8 000 recharges correspondant à $x = 8$.
   Alors $C(8) = 29240$.
   Le coût total pour 8 000 recharges est 29 240 €.

## III

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés.
Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :




B : Le lagon bleu
D : chute d'eau de Dettifoss
G : Geyser de Geysir
H : Rocher Hvitserkur
J : Lagune glacière de Jökulsárlón
L : Massif du Landmannlaugar
M : Lac de Mývan
R : Capitale Reykjavic
V : Ville de Vic

1. (a) Le graphe possède 9 sommets, il est donc d'ordre 9.
   (b) La chaîne D – M – H – R – B – V – G – L – J permet de passer par tous les sommets ; le graphe est donc connexe.
   (c) Les sommets H et G ne sont pas adjacents. Le graphe n'est pas complet.
2. Le graphe possède plus de deux sommets (cinq sommets) de degré impair donc il ne possède pas de chaîne eulérienne. Sarah ne pourra pas emprunter toutes les routes une et une seule fois.

3. (a) On complète la matrice $M$ d'adjacence :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D est $M^4_{(1,2)} = 3$. Il s'agit des chemins : B – R – H – M – D, B – V – L – M – D et B – V – J – M – D.