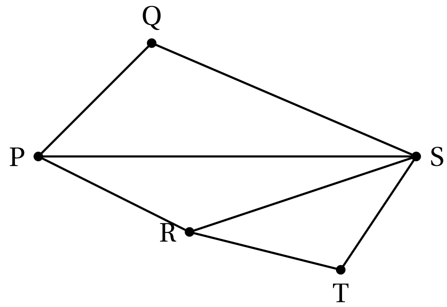
TES (spécialité) : contrôle sur les graphes et matrices

I

On considère le graphe PQRST ci-dessous :



1. Quel est le degré de chaque sommet ?
2. Ce graphe contient-il une chaîne eulérienne ? Justifier.
3. Contient-il un cycle eulérien ? Justifier.

II

Calculer, sans calculatrice, le produit $A \times B$ des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

III

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice A est inversible.
2. Déterminer, sans calculatrice, l'inverse de la matrice A.

IV

Soit le système $\begin{cases} 3x+4y=10 \\ x+2y=8 \end{cases}$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

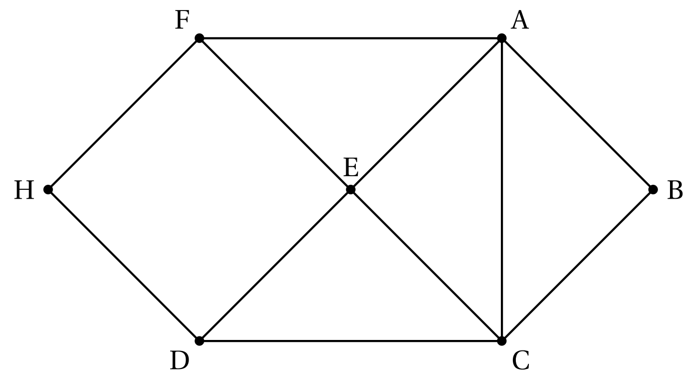
1. Justifier que la matrice A est inversible.
2. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

   Écrire sous forme de calcul matriciel ce système.
3. On admet que la matrice inverse A^{-1} vaut $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

   Résoudre alors **à l'aide de la calculatrice** ce système.

V

On a schématisé ci-dessous le plan d'une MJC (Maison de la Jeunesse et de la Culture) par un graphe dont les sommets sont les salles et les arêtes sont les passages (portes, couloirs ou escaliers) entre les salles. On appelle H le hall d'entrée et B le bureau du directeur.



En fin de journée, un agent de service fait le tour de la MJC pour récupérer dans chaque salle (bureau du directeur et hall inclus) les objets oubliés par les enfants.

1. Préciser si ce graphe est connexe en justifiant la réponse.
2. Déterminer, en justifiant, si l'agent de service peut passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chaque passage.
3. On range les sommets par ordre alphabétique.

   Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe.
4. On donne :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 15 & 26 & 21 & 27 & 18 & 12 \\ 15 & 12 & 15 & 12 & 18 & 12 & 6 \\ 26 & 15 & 31 & 18 & 27 & 21 & 12 \\ 21 & 12 & 18 & 20 & 17 & 18 & 5 \\ 27 & 18 & 27 & 17 & 34 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 21 & 18 & 17 & 20 & 5 \\ 12 & 6 & 12 & 5 & 16 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

   On admet que le coefficient a_{ij} de la matrice M^4 donne le nombre de chemins de longueur 4 entre le sommet correspondant à i et celui correspondant à j. En déduire le nombre de chemins de longueur 4 entre les sommets B et H.