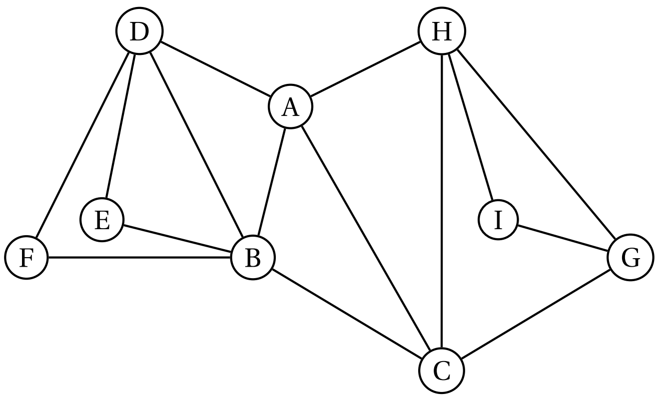
Spécialité TES : devoir sur feuille n° 1

I

Partie A : étude d'un graphe

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous.



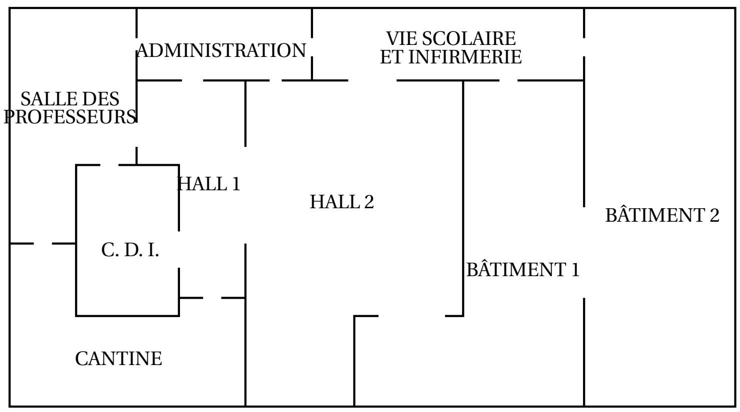
1. (a) Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ est complet.
   (b) Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ est connexe.
2. (a) Donner le degré de chacun des sommets du graphe $\mathcal{G}$.
   (b) Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ admet un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne. La citer le cas échéant.
3. (a) Donner la matrice M associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).
   (b) On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 4&2&2&1&2&2&2&1&1\\ 2&5&1&3&1&1&1&2&0\\ 2&1&4&2&1&1&1&2&2\\ 1&3&2&4&1&1&0&1&0\\ 2&1&1&1&2&2&0&0&0\\ 2&1&1&1&2&2&0&0&0\\ 2&1&1&0&0&0&3&2&1\\ 1&2&2&1&0&0&2&4&1\\ 1&0&2&0&0&0&1&1&2 \end{pmatrix}$.

   Montrer, par un calcul à la main, que le coefficient de la septième ligne et quatrième colonne de la matrice M^3 est égal à 3.

Partie B : Applications

Dans cette partie, on pourra justifier les réponses en s'aidant de la partie A

On donne ci-dessous le plan simplifié d'un lycée



1. Le graphe $\mathcal{G}$ donné en partie A modélise cette situation.

   Compléter le tableau suivant :

Sommet du graphe $\mathcal{G}$	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Lieu correspondant dans le lycée									

2. Un élève a cours de mathématiques dans le bâtiment 1. À la fin du cours, il doit rejoindre la salle des professeurs pour un rendez vous avec ses parents.

   Déterminer le nombre de chemins en trois étapes permettant à l'élève de rejoindre ses parents puis indiquer quels sont ces chemins.
3. Le lycée organise une journée portes-ouvertes. Déterminer, en justifiant, s'il est possible de visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux.

II

L'entreprise Ultra-Eau fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par : $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10$ $\quad a, b$ et c sont des nombres réels.

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

1. Montrer que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$\left\{\begin{array}{rl} a+\ \ b+\ \ c &= 1 \\ 27a+\ 9b+3c &= 17{,}4 \\ 125a+25b+5c &= 73 \end{array}\right.$$

2. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

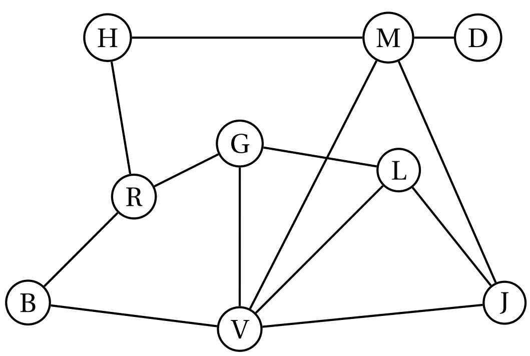
   (a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

   (b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S).

3. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

III

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés.
Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentent les routes ou pistes :



B : Le lagon bleu
D : chute d'eau de Dettifoss
G : Geyser de Geysir
H : Rocher Hvitserkur
J : Lagune glacière de Jökulsárlón
L : Massif du Landmannlaugar
M : Lac de Mývan
R : Capitale Reykjavic
V : Ville de Vic

Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.

1. (a) Déterminer l'ordre du graphe.

   (b) Déterminer si le graphe est connexe.

   (c) Déterminer si le graphe est complet.

2. Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.

3. On appelle M la matrice associée au graphe précédent sachant que les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous une partie de la matrice M ainsi que la matrice M^4 :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M^4 = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 16 & 8 & 14 & 13 & 15 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 5 & 6 & 9 & 11 & 6 & 3 & 12 \\ 16 & 5 & 24 & 11 & 23 & 21 & 26 & 5 & 20 \\ 8 & 6 & 11 & 10 & 13 & 14 & 9 & 3 & 14 \\ 14 & 9 & 23 & 13 & 28 & 29 & 29 & 8 & 30 \\ 13 & 11 & 21 & 14 & 29 & 38 & 32 & 15 & 40 \\ 15 & 6 & 26 & 9 & 29 & 32 & 43 & 14 & 14 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & 15 & 14 & 15 & 21 \\ 10 & 12 & 20 & 14 & 30 & 40 & 34 & 21 & 49 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Il manque certains coefficients de la matrice M. Compléter et recopier uniquement la partie manquante de cette matrice.

   (b) Donner, en le justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B à D et donner ces chemins.