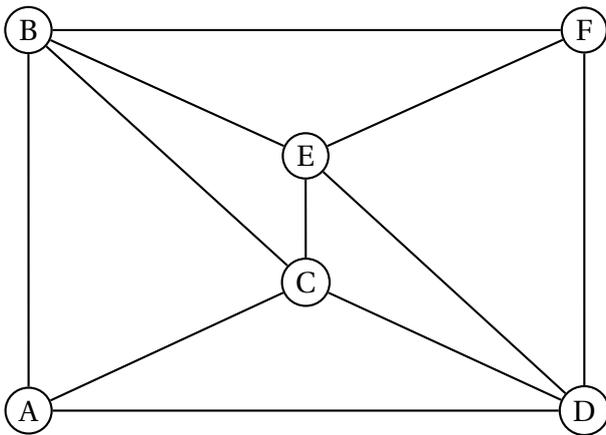


Exercices de bac sur les graphes (feuille n° 1)

I Antilles-Guyane juin 2009

On considère le graphe G suivant :



1. Le graphe G est-il connexe? Expliquer la réponse.
2. Le graphe G admet-il des chaînes eulériennes? Si oui, en préciser une.
3. Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe G. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien?
4. Déterminer un encadrement du nombre chromatique du graphe G. Justifier la réponse.
5. Déterminer alors ce nombre chromatique, en explicitant clairement la démarche.
6. Déterminer la matrice M associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

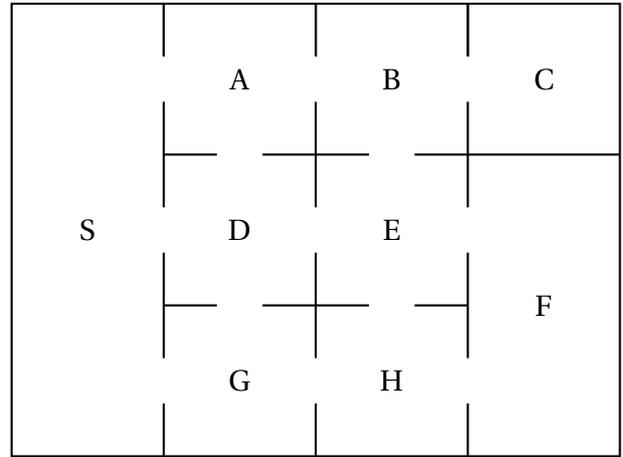
7. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 & 10 & 6 & 5 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 11 & 11 & 6 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 6 & 11 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet A et aboutissant au sommet F. Citer alors toutes ces chaînes.

II D'après Antilles juin 2003

A- Un musée est constitué de 9 salles notées A, B, C, D, E, F, G, H et S.

Le plan du musée est représenté ci-dessous :



Ainsi, un visiteur qui se trouve dans la salle S peut atteindre directement les salles A, D ou G. S'il se trouve dans la salle C, il peut se rendre directement dans la salle B, mais pas dans la salle F.

On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée ni comment il en sort. Cette situation peut être modélisée par un graphe, les sommets étant les noms des salles, les arêtes représentant les portes de communication.

1. Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.
2. Est-il possible de visiter le musée, en empruntant chaque porte une fois et une seule?
Justifier en utilisant un théorème du cours sur les graphes.

B - On note M la matrice à 9 lignes et 9 colonnes associée au graphe précédent, en convenant de l'ordre suivant des salles S, A, B, C, D, E, F, G, H. Le graphe n'étant pas orienté, comment cela se traduit-il sur la matrice?

C - On donne la matrice :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 2 & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 \\ 11 & 3 & 16 & 0 & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 6 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 \\ 20 & 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 \\ 12 & 18 & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

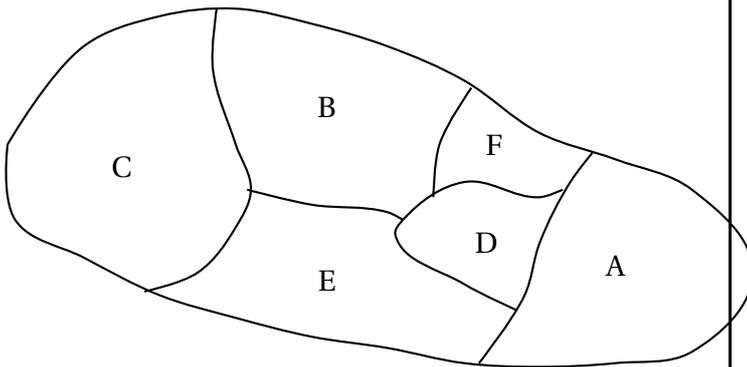
1. Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de D et reviennent à D?

- Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de S et reviennent à C? Les citer.
- Est-il toujours possible de joindre en 4 étapes deux salles quelconques? Justifier.

- Le graphe \mathcal{G} possède-t-il un sous-graphe complet d'ordre 3? Si oui, en citer un. Préciser, sans justification, si le graphe \mathcal{G} possède un sous graphe complet d'ordre 4.

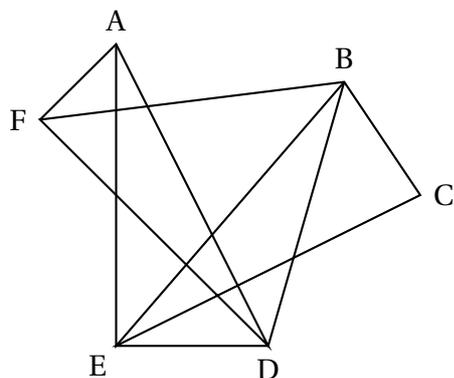
III D'après Asie juin 2007

Une île imaginaire dont la carte est représentée ci-dessous; est composée de six provinces, notées A, B, C, D, E et F.



On s'intéresse aux frontières séparant ces provinces. On traduit cette situation par un graphe dont les sommets sont les provinces et où chaque arête représente une frontière entre deux provinces.

On admet que le graphe \mathcal{G} ci-dessous représente cette situation :

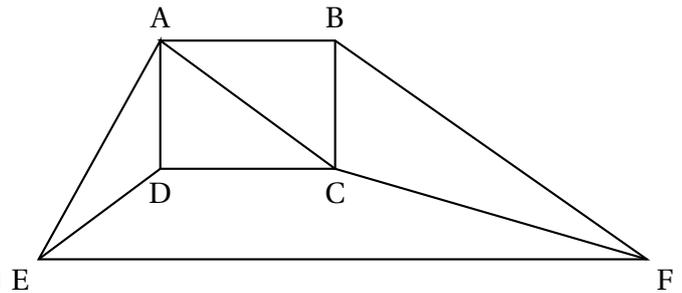


- Donner l'ordre du graphe \mathcal{G} , puis le degré de chacun de ses sommets
 - Peut-on visiter cette île en franchissant une et une seule fois chacune des dix frontières? Justifier Si oui, proposer un parcours possible.

IV Métropole-Réunion septembre 2007

Partie I

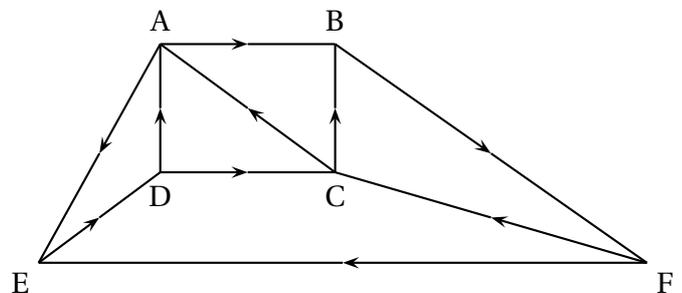
Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent ses avenues commerçantes et les sommets du graphe les carrefours de ces avenues.



- Donner l'ordre de ce graphe, puis le degré de chacun de ses sommets.
- Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue? Justifier votre réponse.

Partie II

Dans le graphe suivant, on a indiqué le sens de circulation dans les différentes avenues.



- Écrire la matrice M associée à ce graphe. (On rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).
- Quel est le nombre de trajets de longueur 2 reliant D à B?
 - Comment pourrait-on obtenir ce résultat uniquement par le calcul à partir de la matrice M?