# Graphes non orientés

## I Cycle eulérien

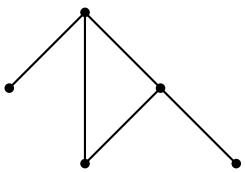
Dans cette partie, on considère des graphes non orientés, pas nécessairement simples.

### I. 1 Graphe connexe

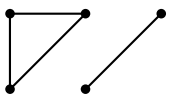
**Définition**

Lorsque, pour chaque paire de sommets d'un graphe, il existe une chaîne reliant ces deux sommets, le graphe est **connexe**.

**Exemples :**



Ce graphe est connexe



Ce graphe n'est pas connexe

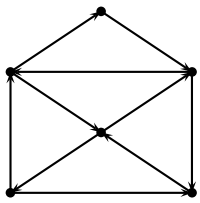
### I. 2 Chaîne eulérienne

**Définition**

Dans un graphe, une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, prises chacune une seule fois, est une chaîne eulérienne.

**Remarque :** on peut passer plusieurs fois par le même sommet, mais pas par la même arête.

Exemple : Considérons le premier exemple du chapitre précédent :



On peut trouver une chaîne eulérienne.

## I. 3 Cycle eulérien

**Définition**

Une chaîne eulérienne dont les extrémités sont confondues est un **cycle eulérien**.

## I. 4 Existence d'un cycle eulérien

**Théorème (admis) :**

Un graphe admet un cycle eulérien si, et seulement si, ce graphe est connexe et s'il n'a aucun sommet de degré impair.

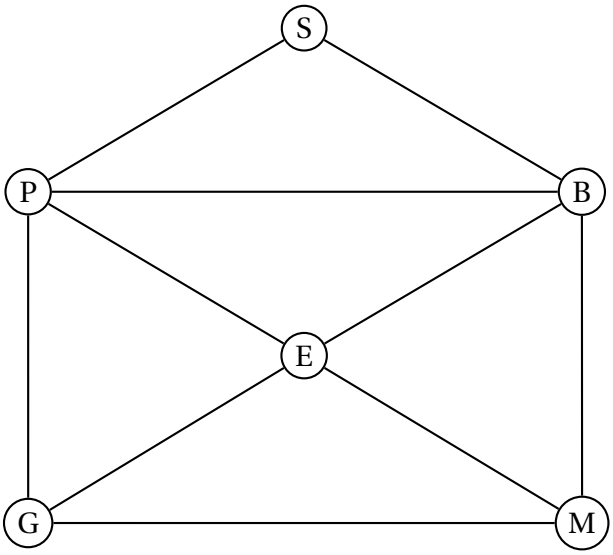
**Remarque :** le problème des ponts de Königsberg n'a pas de solution

## I. 5 Existence d'une chaîne eulérienne

**Théorème (admis) :**

Un graphe admet une chaîne eulérienne entre x et y si, et seulement si, ce graphe est connexe et que x et y sont ses seuls sommets de degré impair.

**Exemple :** Le réseau de pistes cyclables vu dans le chapitre précédent admet une chaîne eulérienne (voir figure donnée en exemple de chaîne eulérienne) :




G et M sont les seuls sommets d'ordre impair (3) : ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

# II Coloriage des sommets d'un graphe

C'est par exemple le problème issu du coloriage d'une carte de géographie, dont on veut colorier les pays ayant une frontière commune avec deux couleurs différentes, tout en minimisant le nombre de couleurs utilisées.

## II. 1 Coloriage et nombre chromatique

**Définition**

Colorier les sommets d'un graphe non orienté G, c'est leur attribuer une couleur (une lettre, un nom, une forme) de façon à ce que deux sommets adjacents ne soient pas coloriés de la même couleur.
Le nombre de couleurs minimal de couleurs nécessaires est le nombre chromatique du graphe, noté $\gamma(G)$. On parle alors de coloration minimale des sommets.

**Exemple : organisation d'un examen**

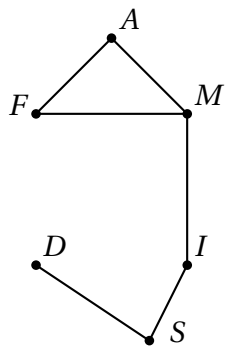
On veut organiser un examen comportant , outre les matières obligatoires communes à tous les candidats, six matières d'options ; français, anglais, mécanique, dessin industriel, informatique et EPS.
Les profils des candidats à options multiples sont : (français, anglais, mécanique) , (dessin industriel, EPS), (informatique, EPS), (Informatique, mécanique).
Une épreuve occupant une demi-journée, quel est le nombre minimal de demi-journées nécessaires pour passer ces options ?

**Résolution :**

Convenons :

- de représenter par un point chaque matière d'option : F pour français, A pour anglais, M pour mécanique, D pour dessin industriel, I pour informatique et S pour EPS.
- de relier deux matières si elles ont été choisies par un même candidat.

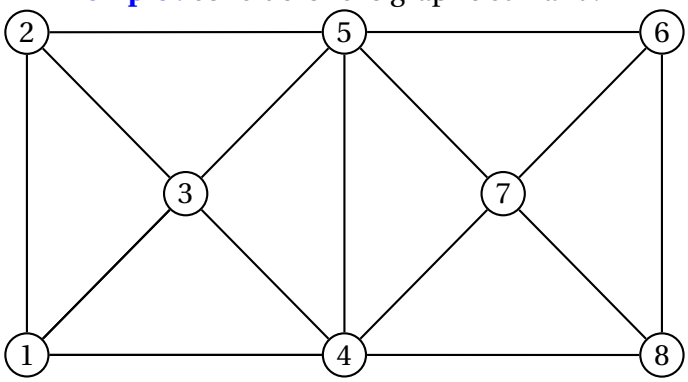
On obtient le graphe ci-dessous :




Les trois sommets F, A et M sont adjacents, donc il faut au minimum trois couleurs. On voi facilement que trois couleurs suffisent, donc il suffit de programmer trois demi-journée pour les options.

## II. 2 Méthode de coloriage par l'algorithme de Welsh et Powell

**Exemple :** considérons le graphe suivant :




**Description**

1. On donne le degré de chaque sommet du graphe à colorier
2. On range les sommets par ordre de degrés décroissants (il peut y avoir plusieurs solutions)
3. Dans la liste ainsi ordonnée, on attribue la couleur $C_1$ au premier sommet de la liste, puis en suivant la liste, on attribue cette même couleur aux sommets qui ne lui sont pas adjacents et qui ne sont pas adjacents entre eux.

**Réalisation**

1.

| sommet | 1 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| degré | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 | 3 |

2. Listes ordonnées possibles

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| liste 1 | 4 | 5 | 3 | 7 | 1 | 2 | 6 | 8 |
| liste 2 | 5 | 4 | 7 | 3 | 2 | 6 | 8 | 1 |

3. On obtient par exemple, en notant V pour vert, R pour rouge et B pour bleu :

| liste 1 | 4 | 5 | 3 | 7 | 1 | 2 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| couleur | V | R | B | B | R | V | V | R |

## II. 3 Nombre chromatique

**Théorème (admis)**

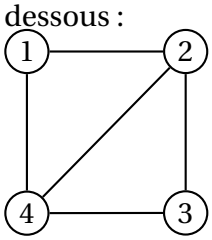
Soit D le degré maximal des sommets d'un graphe G.
Le nombre chromatique $\gamma(G)$ est inférieur ou égal à 1+D : $\boxed{\gamma(G) \leqslant 1 + D}$.

**Cas d'un graphe complet**

Le nombre chromatique d'un graphe complet est l'ordre du graphe.

Exemple d'application :

Considérons le graphe G ci-dessous :




G n'est pas un graphe complet (les sommets 1 et 3 ne sont pas adjacents).
Le sous-graphe 2 - 3 - 4 est quant à lui complet et nécessite donc trois couleurs pour être colorié : on en déduit que $\gamma(G) \geqslant 3$.
Il est clair que trois couleurs suffisent (1 et 3 en rouge, 4 en bleu et 2 en vert) donc $\gamma(G) \leqslant 3$.
On en déduit que $\gamma(G) = 3$.

**Propriété :**

Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à l'ordre du sous-graphe complet d'ordre maximal contenu dans ce graphe.