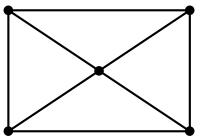
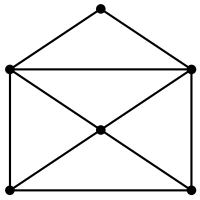
# Généralités sur la théorie des graphes

## Exemples introductifs

### 1 Exemple

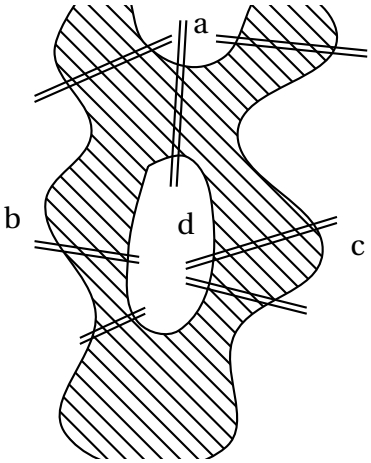
Peut-on dessiner les figures ci-dessous sans lever le crayon et sans tracer deux fois le même segment ?





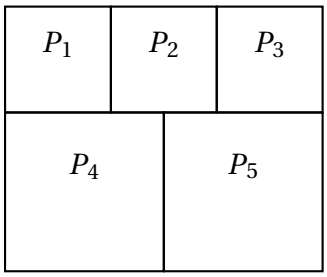
### 2 Ponts de Königsberg

Au XVIIIème siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche. La ville de Königsberg comprenait 7 ponts, disposés selon le schéma ci-dessous. Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?



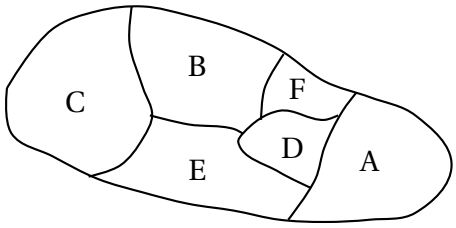

### 3

Cinq pays sont représentés ci-contre avec leurs frontières.
Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?




### 4

Quel est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier cette carte ?



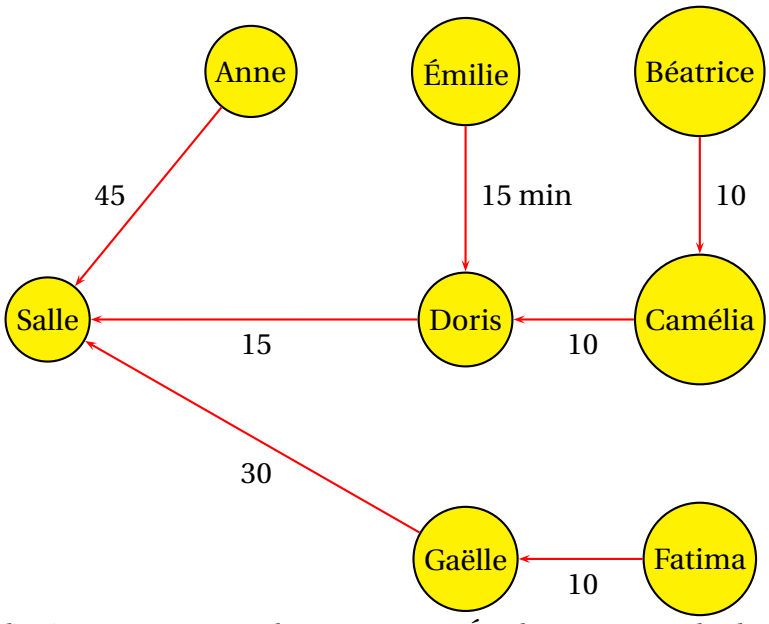
## 5 Ouverture de magasins

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4. Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

## 6 Voyageur de commerce

Un représentant doit visiter dix villes ; il connaît les distances entre chaque ville. Il voudrait pouvoir visiter les dix villes en ne passant qu'une seule fois par chacune d'entre elles et sans repasser par aucune d'entre elles.

## Activité 1 page 230



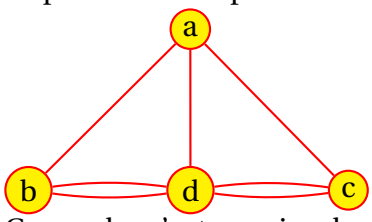

La durée minimum est de 35 minutes. Émilie peut prendre les clés (ou Béatrice, Camélia ou Doris).

# I Vocabulaire de base

**Vocabulaire**

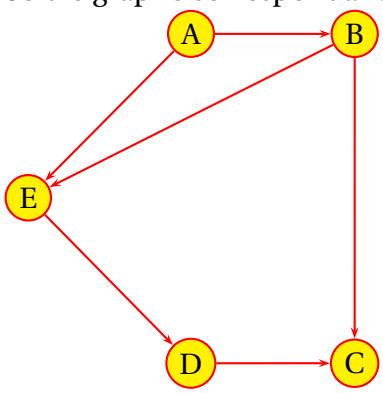
- Un **graphe** est un ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.
- Un **graphe orienté** est un graphe dont les lignes sont fléchées ou orientées.
- Un **sommet** est un point d'un graphe (orienté ou non).
- **L'ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets.
- Une **arête** est une ligne reliant deux sommets, appelés aussi extrémités de l'arête.
- Une **boucle** est une arête dont les extrémités sont confondues.
- Un graphe est **simple** si le graphe est sans boucle et, entre deux sommets, il y a au plus une arête.
- Deux sommets sont **adjacents** s'ils sont reliés par une arête.
- Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Exemple 1 Le problème des ponts de Königsberg se dessine par le graphe suivant :

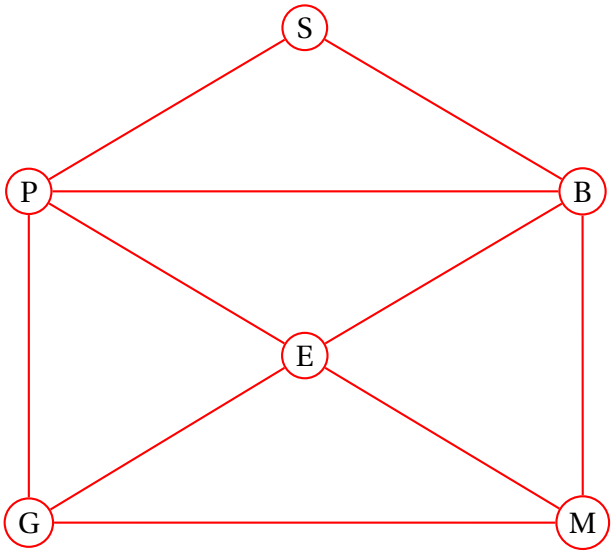



Ce graphe n'est pas simple.
Le degré de a est 3 ; celui de b est 3 ; celui de d est 4.

Exemple 2 On considère un tournoi de ping-pong avec cinq joueurs A, B, C, D et E. On note $A \to B$ le fait que A a battu B.
Soit le graphe correspondant aux résultats :




Exemple 3 Dans une ville, entre la salle de sports (S), la Piscine (P), la bibliothèque (B), l'école (E), la Gare (G) et le centre commercial (M) existent un certain nombre de pistes cyclables, représentées par le graphe suivant (voir livre page 234).




**Théorème**

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre total d'arêtes.
C'est donc un nombre pair.

**Exemple d'un réseau téléphonique :**

Dans une « toute petite ville », il y a 15 appareils téléphoniques. Est-il possible de les relier par des fils téléphoniques pour que chaque appareil soit relié avec exactement 5 autres ?

**Solution :** On construit un graphe, ou du moins on imagine un graphe correspondant au problème : les sommets sont les appareils et les arêtes sont les fils ; les sommets ont tous un degré impair et il y en a un nombre impair donc la somme de tous les degrés est impaire : c'est impossible.

**Vocabulaire :**

- Un graphe est dit **complet** lorsque toutes les paires de sommets sont des paires de sommets adjacents.
  **Exemple :** le graphe précédent, correspondant aux pistes cyclables, n'est pas complet.
- On appelle **sous graphe** le graphe composé de certains sommets et des arêtes qui relient ces sommets.
- Deux sommets d'un graphe étant choisis, on appelle **chaîne** une suite d'arêtes mises bout à bout reliant ces deux sommets.
  Si le graphe est orienté, la chaîne est orientée.
- La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes constituant la chaîne. (Cela n'a rien à voir avec une longueur réelle !)
- Un cycle dans un graphe est une chaîne dont les extrémités coïncident, toutes les arêtes étant distinctes.

# II Matrice associée à un graphe

## 1 Rappels sur les matrices

### 1.1 Définitions

Une matrice est un tableau de nombres.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

On donne d'abord le nombre de lignes, puis le nombre de colonnes. La matrice ci-dessus est donc une matrice $2 \times 3$.

## 1.2 Matrices particulières

- Matrice ligne : elle ne contient qu'une seule ligne ; exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}$
- Matrice colonne : elle ne contient qu'une seule colonne
- Matrice carrée : le nombre de lignes est égale au nombre de colonnes
- Matrice diagonale : matrice carrée dont tous les termes en dehors de la diagonale sont nuls : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$
- Matrice unité : tous les termes valent 1
- Matrice nulle : tous les termes valent 0
- Transposée d'une matrice $A$ : matrice dont les lignes sont les colonnes de $A$ ; on la note ${}^tA$

  Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

textbfRemarque : deux matrices sont égales si et seulement si tous leurs termes sont égaux.

## 1.3 Opérations sur les matrices

**Addition et soustraction :**
Soient A et B deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes : la matrice A+B est obtenue en ajoutant l'élément de A avec l'élément correspondant de B.
Idem pour la soustraction.

**Multiplication par un réel k :**
Si A est une matrice, kA est la matrice obtenue en multipliant chaque terme de A par $k$

**Produit d'une matrice par une matrice colonne**
Soient une matrice A et V une matrice colonne, ayant le même nombre de termes que le nombre de lignes de A.
Le produit $A \times V$ est une matrice colonne ; le terme de la ligne $i$ est obtenu en calculant la somme des produit des termes de la ligne $i$ de $A$ par les termes de la colonne de $V$.
Si $c_i$ est le terme de la $i$-ième ligne de $AV$ : $c_i = \sum_j a_{ij} v_j$
Exemple :
$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ ; $AV = \begin{pmatrix} 3 \times 7 + 5 \times 3 \\ 2 \times 3 - 1 \times 3 \\ 9 \times 7 - 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 3 \\ 56 \end{pmatrix}$

**Produit de deux matrices** Soient $A$ une matrice $i \times j$ et $B$ une matrice $j \times k$. Le produit $C = A \times B$ est une matrice $i \times k$.
Le terme général $c_{ik}$ est la somme des produits des termes de la ligne $i$ de $A$ par la colonne $k$ de $B$ :
$c_{ik} = a_{i1} \times a_{1k} + a_{i3} \times a_{2k} + \cdots + a_{ij} \times a_{jk}$

**Exemple :**
$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ 7 & 10 & 5 \\ 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 5 \times 7 + (-2) \times 8 & 1 \times 9 + 5 \times 10 - 2 \times 7 & 1 \times 1 + 5 \times 5 - 2 \times 0 \\ 3 \times 4 + 2 \times 7 + 4 \times 8 & 3 \times 9 + 2 \times 10 + 4 \times 7 & 3 \times 1 + 2 \times 5 + 4 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 45 & 26 \\ 58 & 75 & 13 \end{pmatrix}$$

**Remarque :** si $A$ est une matrice carrée, on note $A^2$ le produit $A \times A$.

**Propriétés :**

Soient $A$, $B$, $C$ trois matrices et $k$ et $k'$ deux réels. Alors :

- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $k(A+B)=kA+kB$
- $(k+k')A=kA+k'A$
- $k(k'A)=(kk')A$
- $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$
- $A\times(kB)=k(A\times B)$
- $A(BC)=(AB)C$
- $A\times(B+C)=AB+AC$
- $(A+B)\times C=AC+BC$

**Inverse d'une matrice carrée**.

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. $B$ est la matrice inverse de $A$ si et seulement si $AB=BA=I_n$ (matrice identité d'ordre $n$). On écrit alors $B=A^{-1}$

**Remarque :** Il est difficile en général de calculer l'inverse d'une matrice.

**Exemple :** $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$.

Vérifier que $B$ est l'inverse de $A$.

**Intérêt :** résoudre des systèmes d'équations.

**Remarque :** toutes les matrices n'ont pas d'inverse.

## 2 Lien avec les graphes

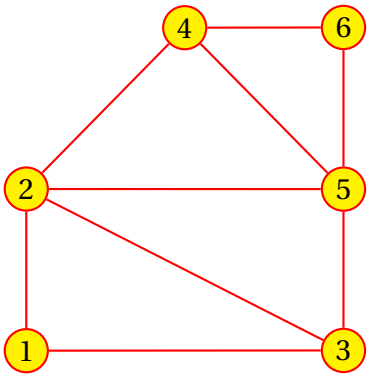
**Définition**

On considère un graphe à $n$ sommets numérotés de 1 à $n$.

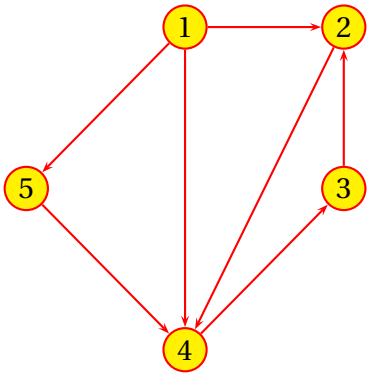
La matrice associée à un graphe d'ordre $n$ est la matrice carrée $A$ de format $n\times n$, dont l'élément $a_{ij}$ est égal au nombre d'arêtes reliant $i$ à $j$.

Pour un graphe orienté, $a_{ij}$ est le nombre d'arêtes orientées allant de $i$ vers $j$.

**Exemples :**

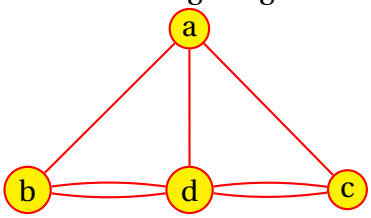
1. 


La matrice associée est : $\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&1&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&0&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{pmatrix}$

2. 


La matrice associée est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Ponts de Königsberg :



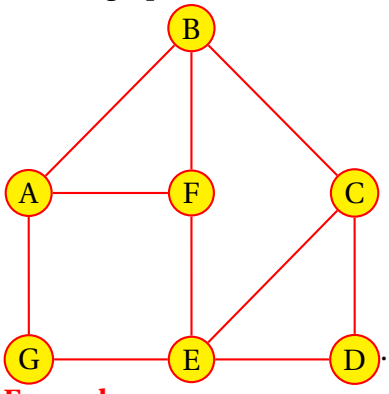

La matrice associée est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4. Trouver un graphe associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Théorème :**

Soit $A$ la matrice associée à un graphe et soit $p$ un entier $\geqslant 1$.
$A^p$ est la puissance $p$ -ième de A.
L'élément $p_{ij}$ de la matrice $A^p$ est égal au nombre de chaînes de longueur $p$ reliant les sommets $i$ à $j$.

Exemple :
Soit un graphe :



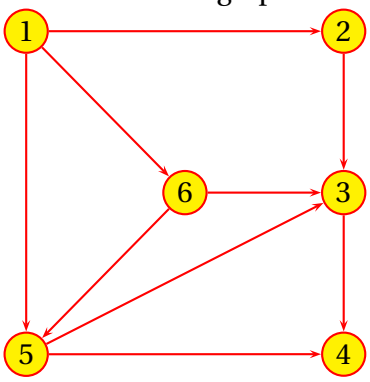

1. Donner la matrice $M$ associée à ce graphe.

2. Vérifier que : $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

On en déduit par exemple qu'il y a deux chaînes de longueur 2 allant de E vers A.

**Exemple :**

On considère le graphe suivant :




La matrice associée est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On obtient : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$ ; $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit qu'il y a 3 chaînes de longueur 2 reliant 1 et 3, 1 chaîne de longueur 2 reliant 2 à 4, 2 chaînes de longueur 2 reliant 6 à 4 et 4 chaînes de longueur 3 reliant 1 à 4