

Exercices d'introduction aux calculs sur les matrices

I Matrices et opérations

Une ville du sud de la France compte deux campings : « Grand soleil » et « Au bord de l'eau ». Les deux tableaux ci-dessous récapitulent l'occupation de ces campings lors de la saison estivale 2016.

Grand Soleil	Pension complète	
	avec	sans
Bungalow	150	30
Mobil-home	120	50
Aire de Camping	0	250

Au bord de l'eau	Pension complète	
	avec	sans
Bungalow	40	10
Mobil-home	390	110
Aire de Camping	10	120

1. (a) En ne conservant que les coefficients du premier tableau, on obtient la **matrice** $A =$

$$\begin{pmatrix} 120 & 50 \\ 120 & 50 \\ 0 & 250 \end{pmatrix}.$$

- (b) Déterminer la matrice B résumant le deuxième tableau.
(c) Déterminer la matrice $C = A + B$ en additionnant les coefficients correspondants dans les matrices A et B . Que représente cette nouvelle matrice C ?
2. Pour l'année 2017, la ville compte sur une augmentation de 10 % de l'occupation dans le camping « Grand Soleil » mais prévoit une baisse de 10 % dans le camping « Au bord de l'eau », toutes catégories et emplacements confondus. On note D la matrice décrivant l'occupation du camping « Beau soleil » pour l'année 2017.

- (a) Par quel nombre faut-il multiplier tous les coefficients de la matrice A pour obtenir ceux de D ?
(b) Déterminer la matrice D .
(c) Que représente la matrice

$$E = 1,1 \times A + 0,9 \times B ?$$

Déterminer cette matrice.

- (d) Combien de locations avec pension complète peut-on prévoir en 2017 sur l'ensemble des deux campings

II Exercice d'application

Un conservateur de musée souhaite faire restaurer certaines œuvres. Il les a classées par taille et emplacement dans le tableau 1 ci-dessous .

Tableau 1 :

	Petite	Moyenne	Grande
Étage 1	2	1	4
Étage 2	4	3	2

- Résumer ce tableau 1 par une matrice A .
- Le budget du musée permet de restaurer, pour chaque taille et chaque étage, exactement deux fois plus d'œuvres que celles qui ont été répertoriées. Résumer ces contraintes par une matrice F .
- Le conservateur a recensé dans le tableau 2 d'autres œuvres qui pourraient profiter d'une rénovation :

Tableau 2 :

	Petite	Moyenne	Grande
Étage 1	2	2	6
Étage 2	6	3	3

Résumer le tableau 2 par une matrice B .

- Que représente la matrice $A + B$? La déterminer.
- Le budget permet-il de restaurer ces œuvres supplémentaires, pour chaque taille et chaque étage?

III Multiplication des matrices

La matrice A ci-contre donne le nombre de matchs gagnés, nuls et perdus pour trois clubs à la fin d'un championnat de football; $A = \begin{pmatrix} 21 & 4 & 13 \\ 18 & 12 & 8 \\ 17 & 13 & 8 \end{pmatrix}$.

Les lignes correspondent aux différents clubs.

- (a) Combien de matchs le club 3 a-t-il gagnés?
(b) Que signifie le 12 écrit dans la matrice A ?
- (a) Depuis 1995, une victoire rapporte 3 points, un match nul rapporte 1 point et une défaite 0 point.

Établir, selon ces règles, le classement de ces trois clubs.

- (b) La matrice colonne $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ résume la

règle ci-dessus.

Retrouver le résultat de la question a) en effectuant le produit $A \times P$ en multipliant les nombres d'une ligne par les noms des de la matrice colonne P .

- (c) Avant 1995, une victoire rapportait 2 points, un match nul 1 point et une défaite 0 point. Utiliser une multiplication de matrices pour déterminer le classement de ces trois clubs avec les anciennes règles.
- (d) Dans certains championnats de district, une victoire rapporte 4 points, un match nul rapporte 2 points et une défaite 1 point. Effectuer le produit matriciel $A \times B$ où B est la matrice ci-dessous, en utilisant une disposition analogue à celle de la question .b), afin d'établir simultanément les classements de ces trois clubs selon les trois règles.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV Inverse d'une matrice

Un artisan chocolatier propose deux types de chocolats : le noir intense et le fruité. La fabrication d'une tablette :

- de chocolat intense nécessite 30 min de travail et 750 g de cacao.
- de chocolat fruité nécessite 20 min de travail et 400 g de cacao.

Au couts du mois, l'artisan a consacré 760 min de travail et 16 800 g de cacao à la fabrication de ces deux types de chocolat.

On veut déterminer le nombre de tablettes de chaque type que l'artisan a fabriquées durant le mois.

- Mise en équation** : on note x et y le nombre de tablettes de chaque sorte fabriquées durant le mois.

Traduire les hypothèses par un système (S) de deux équations à deux inconnues.

- Utilisation du calcul matriciel** :

On considère les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et

$$B = \begin{pmatrix} 760 \\ 16800 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que le système \mathcal{S} est équivalent à l'équation matricielle $A \times X = B$ où A est une matrice à préciser.

- (b) On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identité). Que vaut $I \times X$?

- (c) La matrice carrée notée A^{-1} telle que $A^{-1} \times A = I$.

Expliquer alors pourquoi la résolution de l'équation $A \times X = B$ revient à calculer $X = A^{-1} \times B$.

- (d) Déterminer A^{-1} en utilisant la touche x^{-1} de la calculatrice.

- (e) Calculer alors X et résoudre alors le problème.