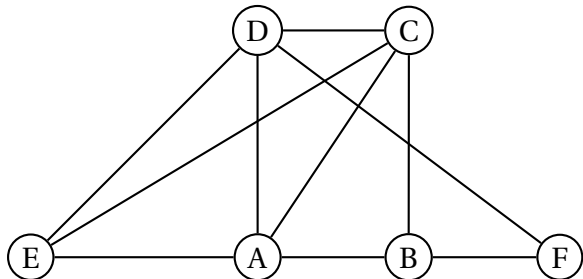


Exercices sur les chaînes et cycles eulériens

I n° 53 page 283

Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs A, B, C, D, E, F soient reliés par des grandes allées comme montré sur le graphe ci-dessous.



1. Justifier que le graphe est connexe.
Dresser le tableau donnant le degré de chaque sommet.
2. Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant pas celles-ci qu'une seule fois. Démontrer que son souhait est réalisable et donner un exemple d'un tel parcours.

II n° 56 page 284

On considère le graphe associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Préciser si ces affirmations sont vraies ou fausses.

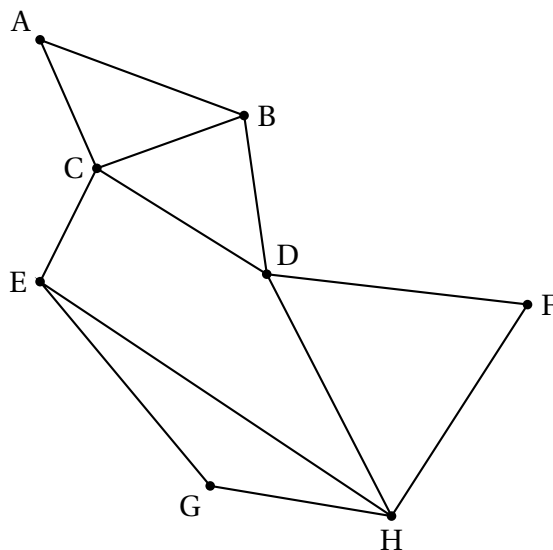
1. Ce graphe ne contient pas de boucle.
2. Ce graphe est un graphe orienté.

3. Le degré du premier sommet est 6.
4. Il y a deux arêtes qui partent de B.
5. Il y a deux arêtes qui arrivent à B.
6. Le graphe contient 11 arêtes.

III d'après Pondichéry avril 2011

Un orchestre doit effectuer une tournée passant par les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier.

Le graphe Γ ci-dessous représente les différentes villes de la tournée et les autoroutes reliant ces villes (une ville est représentée par un point, une autoroute par une arête) :



Est-il possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute? (la réponse sera justifiée).

Si oui citer un trajet de ce type.

Correction :

I

1.

sommet	A	B	C	D	E	F
degré	4	3	4	4	3	2
2. Il y a deux sommets dont le degré est impair et deux seulement : E et B. Il y a une chaîne eulérienne reliant E à B.
3.
 - on commence par trouver une chaîne reliant E à B : E-D-C-B
 - On adjoint un cycle un cycle contenant des arêtes non contenues dans la chaîne précédente et d'extrémité un sommet de la chaîne précédente : **E-C-A-E**-E-D-C-B
 - On recommence : E-C-A-E-E-D-C-B-**F-D-A-B**

II

1. Il y a des boucles en A et B (éléments de la diagonale de la matrice)
2. Le graphe est orienté (matrice non symétrique)
3. Le degré du premier sommet est 1
4. Oui, deux arêtes partent de B, donc une boucle.
5. Une seule arête arrive ne B.
6. Oui, il y a 11 arêtes.

III Pondichéry

On cherche s'il existe une chaîne eulérienne.

La chaîne A-B-D-F-H-G-E-C contient tous les sommets du graphe.

Donc pour toute paire de sommets il existe un chemin les reliant : le graphe est connexe.

Les sommets B et E sont les seuls de degré impair : il existe donc une chaîne eulérienne partant de l'un d'eux et finissant à l'autre ; par exemple : B-A-C-D-F-H-G-E (ou inversement).