Exercices de bac

I Mercatique-CFE Polynésie novembre 2011

Une petite entreprise fabrique des ours et des lapins en peluche. Elle dispose de 16 m de tissu et de 36 boutons (pour les yeux) par jour.

La fabrication d'un ours en peluche nécessite 60 cm de tissu et 2 boutons. Celle d'un lapin nécessite 100 cm de tissu et 2 boutons.

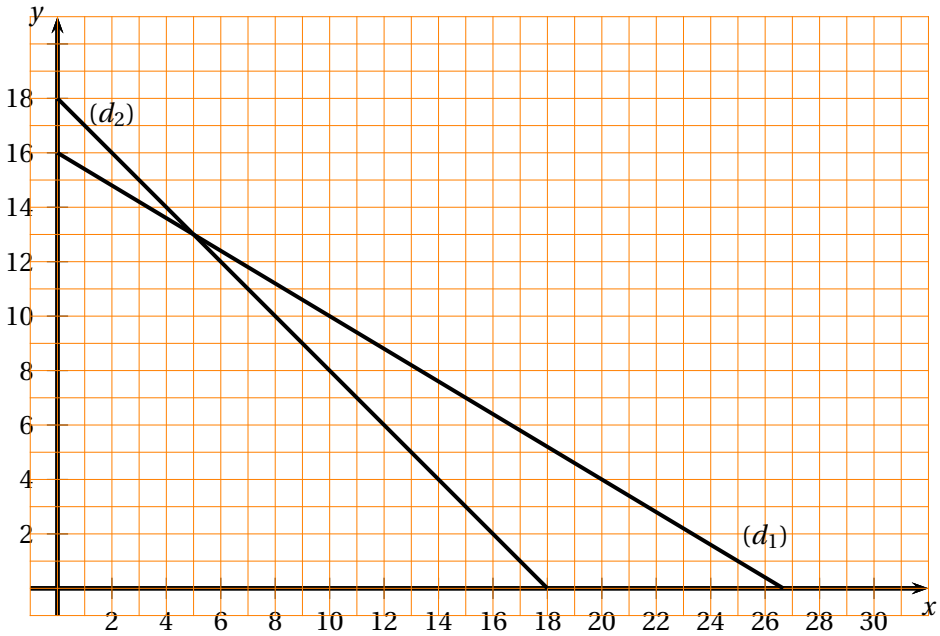
On considère que le coût du fil (nécessaire pour assembler les éléments, ainsi que pour broder les nez) est négligeable, si bien que l'entreprise en dispose à volonté.

On note x le nombre d'ours et y le nombre de lapins en peluche fabriqués par jour.

1. Montrer que les contraintes auxquelles sont soumises les productions journalières de l'entreprise se traduisent par le système (S) suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ 3x+5y & \leqslant & 80 \\ x+y & \leqslant & 18 \end{cases}$$

2. Sur la figure donnée ci-dessous, on a tracé, dans un repère, les droites (d_1) et (d_2).
   (a) À quelle contrainte est associée la droite (d_1) ?
   (b) À quelle contrainte est associée la droite (d_2) ?
   (c) Déterminer graphiquement, en hachurant la partie du plan qui ne convient pas, l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\ y)$ vérifient le système ci-dessus.
3. (a) L'entreprise peut-elle produire 8 ours et 11 lapins en peluche par jour ?
   (b) L'entreprise peut-elle produire 5 ours et 13 lapins en peluche par jour ?
   (c) L'entreprise peut-elle produire 4 ours et 13 lapins en peluche par jour ?
4. L'entreprise réalise un bénéfice de 6 euros sur un ours en peluche, et un bénéfice de 8 euros sur un lapin en peluche.
   On suppose que l'entreprise vend toute sa production.
   (a) Exprimer en fonction de x et de y le bénéfice journalier qu'elle réalise.
   (b) Donner une équation de la droite qui correspond à un bénéfice de 120 euros. Tracer, dans le repère en annexe, cette droite et donner un couple solution du système (S) correspondant à un bénéfice de 120 euros.
   (c) Déterminer graphiquement le nombre d'ours et de lapins en peluches à fabriquer par jour pour assurer un bénéfice maximal.
   (d) Quel est, alors, ce bénéfice maximal en euros ?



II Mercatique-CFE-Nouvelle Calédonie novembre 2011

Sur la figure donnée ci-dessous, on a tracé la droite d'équation

$$y = -\frac{3}{2}x + 13,5.$$

Déterminer, en hachurant la partie du plan qui ne convient pas, l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & -\frac{3}{2}x + 13,5 \\ y & \geqslant & -\frac{2}{3}x + 8 \end{cases}$$

Partie B

Dans un lycée, un groupe d'élèves se charge de la distribution de pains au chocolat et de croissants lors de la récréation de dix heures. Pour pouvoir satisfaire la demande, ils doivent disposer au minimum de 108 pains au chocolat et de 96 croissants.

Deux boulangers proposent :

- l'un le lot A comprenant 12 pains au chocolat et 8 croissants ;
- l'autre le lot B composé de 8 pains au chocolat et 12 croissants.

Les lycéens décident d'acheter des lots chez les deux boulangers.

On note x le nombre de lots A achetés et y le nombre de lots B achetés.

1. Traduire les contraintes du problème sous forme d'un système d'inéquations.
2. Montrer que le nombre de lots A et le nombre de lots B vérifient le système d'inéquations de la partie A.
3. Un lot A coûte 12 € et un lot B coûte 10€.
   (a) Calculer la dépense pour x lots A et y lots B achetés, en fonction de x et y.
   (b) Les élèves souhaitent déterminer le couple $(x\ ;\ y)$ qui permettra d'obtenir la dépense minimale. À l'aide d'un tableur, ils obtiennent la feuille de calcul donnée en annexe.

   Parmi les formules suivantes, indiquer celle à saisir dans la cellule B2 afin de compléter le tableau par recopie.

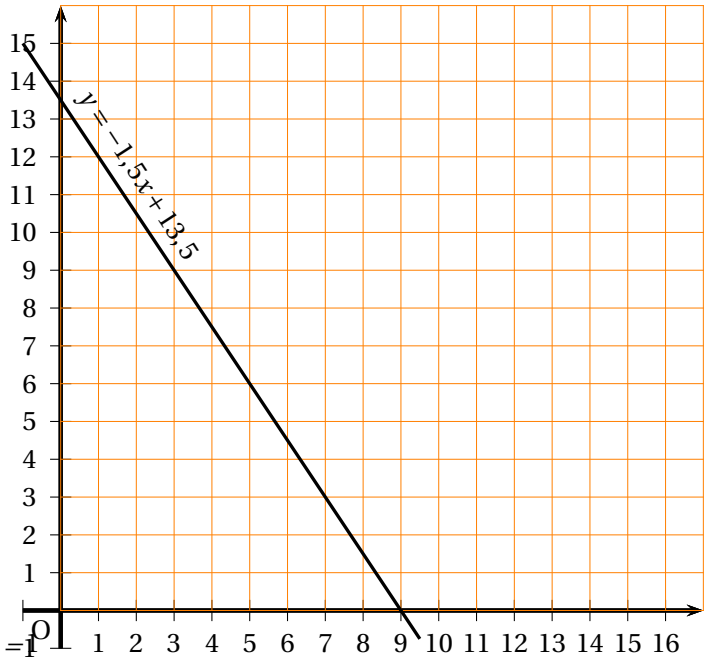
   Formule 1 : =12*A2+10*B1

   Formule 2 : =12*$A2+10*B$1

   Formule 3 : =12*A$2+10*$B1

   (c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer, à l'aide du tableau donné en annexe 1 et du graphique, le couple qui permet de satisfaire la demande au moindre coût. Calculer alors cette dépense.



Correction

I

Une petite entreprise fabrique des ours et des lapins en peluche. Elle dispose de 16 m de tissu et de 36 boutons (pour les yeux) par jour.

La fabrication d'un ours en peluche nécessite 60 cm de tissu et 2 boutons. Celle d'un lapin nécessite 100 cm de tissu et 2 boutons.

On considère que le coût du fil (nécessaire pour assembler les éléments, ainsi que pour broder les nez) est négligeable, si bien que l'entreprise en dispose à volonté.

On note x le nombre d'ours et y le nombre de lapins en peluche fabriqués par jour.

1. Nous pouvons traduire les données du problème sous forme d'un tableau.

	ours x	lapins y	maximum ($\leqslant$)
tissu en cm	60	100	1 600
boutons	2	2	36

puis traduire ces données sous forme d'inéquations.
- contrainte liée aux nombres $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$
- contrainte liée à la quantité de tissu : $60x + 100y \leqslant 1\,600$
- contrainte liée aux boutons : $2x + 2y \leqslant 36$

d'où le système d'inéquations

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} & \text{à défaut } x \geqslant 0 \\ y \in \mathbb{N} & \text{à défaut } y \geqslant 0 \\ 60x + 100y \leqslant 1\,600 \\ 2x + 2y \leqslant 36 \end{cases}$$

Les contraintes auxquelles sont soumises les productions journalières de l'entreprise se traduisent donc par le système (S) suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \\ 3x + 5y & \leqslant & 80 \\ x + y & \leqslant & 18 \end{cases}$$

2. Sur la figure donnée en annexe, on a tracé, dans un repère, les droites (d_1) et (d_2).
   (a) La droite (d_1) est la frontière associée à la contrainte « tissu ».
   (b) La droite (d_2) est la frontière associée à la contrainte « boutons ».
   (c) L'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient l'inéquation $ax + by \leqslant c$ est un demi-plan fermé de frontière la droite d'équation $ax + by = c$. Pour déterminer ce demi-plan, il suffit de calculer la valeur associée à un point du plan. Si l'inéquation est vérifiée, le demi-plan solution est celui contenant ce point, sinon c'est l'autre demi-plan.

   L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x + 5y \leqslant 80$ est le demi-plan de frontière la droite (d_1) et contenant l'origine. La partie ne convenant pas est hachurée en bleu sur l'annexe.

   L'ensemble des solutions de l'inéquation $x + y \leqslant 18$ est le demi-plan de frontière la droite (d_2) et contenant l'origine. La partie ne convenant pas est hachurée en vert sur l'annexe.

   L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient le système ci-dessus est l'ensemble des points situés dans le premier quadrant et appartenant à l'intersection des demi-plans définis précédemment, les segments de droite inclus.
3. (a) L'entreprise ne peut produire 8 ours et 11 lapins en peluche par jour car le point de coordonnées $(8\ ;\ 11)$ n'appartient pas à l'ensemble des solutions de (S)
   (b) L'entreprise peut produire 5 ours et 13 lapins en peluche par jour car le point de coordonnées $(5\ ;\ 13)$ appartient à l'ensemble des solutions de (S) ou il appartient à la droite (d_1) et à la droite (d_2)

(c) L'entreprise peut produire 4 ours et 13 lapins en peluche par jour car le point de coordonnées (4 ; 13) appartient à l'ensemble des solutions de (S)

4. L'entreprise réalise un bénéfice de 6 euros sur un ours en peluche, et un bénéfice de 8 euros sur un lapin en peluche.

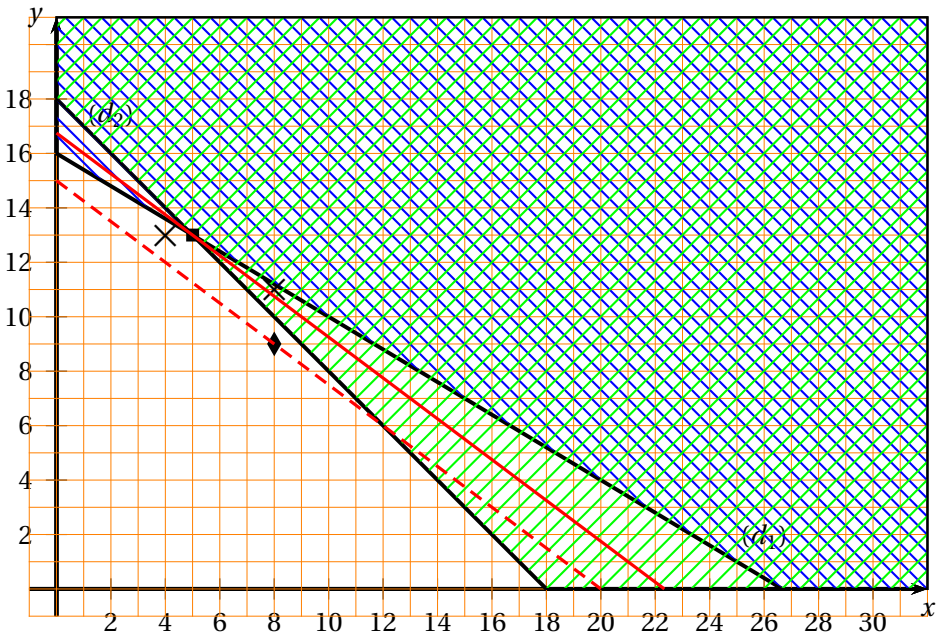
   On suppose que l'entreprise vend toute sa production.

   (a) Le bénéfice journalier en fonction de x et de y qu'elle réalise est $6x+8y$.

   (b) Une équation de la droite correspondant à un bénéfice de 120 euros est $6x+8y=120$ ou $y=-\frac{3}{4}x+15$. Elle est tracée, dans le repère en annexe, en pointillé. Un couple solution du système (S) correspondant à un bénéfice de 120 euros est (8 ; 9)

   (c) Le bénéfice est maximal lorsque les contraintes sont saturées c'est-à-dire lorsque toutes les quantités disponibles sont utilisées. Nous avons vu que le point de coordonnées (5 ; 13) appartenait aux deux droites. Le nombre d'ours et de lapins en peluches à fabriquer par jour pour assurer un bénéfice maximal est respectivement de 5 et de 11.

   (d) Ce bénéfice maximal est alors $6\times5+8\times13$ soit un montant de 134 euros.



II

Partie A

Sur la figure donnée en annexe 1 (à rendre avec la copie), on a tracé la droite d'équation

$$y=-\frac{3}{2}x+13,5.$$

L'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'inéquation $y\geqslant ax+b$ est le demi-plan situé au dessus de la droite d'équation $y=ax+b$, celle-ci incluse.

$x\geqslant0$ et $y\geqslant0$ définissent le premier quadrant.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $y\geqslant-\frac{3}{2}x+13,5$ est le demi-plan situé au dessus de la droite $y=-\frac{3}{2}x+13,5$. La partie ne convenant pas est hachurée en bleu sur l'annexe.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $y\geqslant-\frac{2}{3}x+8$ est le demi-plan situé au dessus de la droite $y=-\frac{2}{3}x+8$.

Pour la construire, choisissons deux points (0 ; 8) et (12 ; 0). La partie ne convenant pas est hachurée en cyan.

L'ensemble des points du plan M dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient le système

$$\begin{cases} x\geqslant0\\ y\geqslant0\\ y\geqslant-\frac{3}{2}x+13,5\\ y\geqslant-\frac{2}{3}x+8\end{cases}$$

est la partie du plan non hachurée sur le dessin, les segments de droites étant incluses.

Partie B

Dans un lycée, un groupe d'élèves se charge de la dis-

tribution de pains au chocolat et de croissants lors de la récréation de dix heures. Pour pouvoir satisfaire la demande, ils doivent disposer au minimum de 108 pains au chocolat et de 96 croissants.

Deux boulangers proposent :

- l'un le lot A comprenant 12 pains au chocolat et 8 croissants ;
- l'autre le lot B composé de 8 pains au chocolat et 12 croissants.

Les lycéens décident d'acheter des lots chez les deux boulangers.
On note x le nombre de lots A achetés et y le nombre de lots B achetés.

1. Nous pouvons traduire les données du problème sous forme d'un tableau.

	Lot A x	Lot B y	minimum
pains	12	8	108
croissants	8	12	96

puis traduire ces données sous forme d'inéquations.

- contrainte liée aux nombres $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$
- contrainte liée aux pains au chocolat : $12x + 8y \geqslant 108$
- contrainte liée aux croissants : $8x + 12y \geqslant 96$

d'où le système d'inéquations

$$\begin{cases} x \in \mathbb{N} & \text{à défaut } x \geqslant 0 \\ y \in \mathbb{N} & \text{à défaut } y \geqslant 0 \\ 12x + 8y \geqslant 108 \\ 8x + 12y \geqslant 96 \end{cases}$$

2. Montrons que le nombre de lots A et le nombre de lots B vérifient le système d'inéquations de la partie A.

L'inéquation $12x + 8y \geqslant 108$ peut aussi s'écrire $8y \geqslant -12x + 108$ ou $y \geqslant -\dfrac{3}{2}x + 13{,}5$.

L'inéquation $8x + 12y \geqslant 96$ peut aussi s'écrire $12y \geqslant -8x + 96$ ou $y \geqslant -\dfrac{2}{3}x + 8$.

En complétant par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, nous retrouvons le système d'inéquations de la partie A.

3. Un lot A coûte 12 € et un lot B coûte 10€.

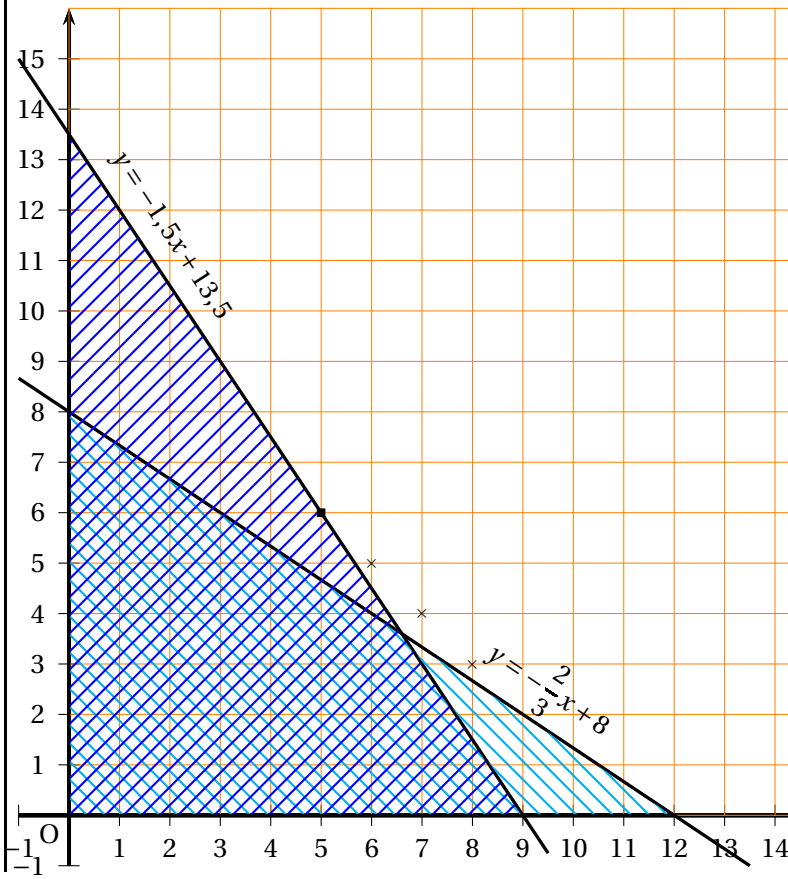
   (a) La dépense pour x lots A et y lots B achetés s'élève à $12x + 10y$.

   (b) Les élèves souhaitent déterminer le couple $(x\ ;\ y)$ qui permettra d'obtenir la dépense minimale. À l'aide d'un tableur, ils obtiennent la feuille de calcul donnée en annexe.

   Parmi les formules suivantes, indiquons celle à saisir dans la cellule B2 afin de compléter le tableau par recopie.

   Formule 1 : ~~=12*A2+10*B1~~

   Formule 2 : =12*$A2+10*B$1

   Formule 3 : ~~=12*A$2+10*$B1~~

   (c) Déterminons le couple qui permet de satisfaire la demande au moindre coût. La dépense est minimale lorsque les quantités demandées sont juste satisfaites ou un peu plus. Les deux contraintes ne peuvent être simultanément saturées puisque les coordonnées du point d'intersection ne sont pas entières. Cherchons à l'aide du graphique, les points à coordonnées entières appartenant à l'ensemble solution qui saturent une contrainte et proche du point d'intersection. Nous trouvons le point (5 ; 6). Si maintenant, nous augmentons le nombre de lots A, le nombre de lots B va diminuer et par conséquent le coût va augmenter puisqu'un lot A coûte plus qu'un lot B. Les élèves choisiront d'acheter 5 lots A et 6 lots B pour une dépense totale de 120 euros.