Exercices de bac sur la fonction ln

I Antilles-Guyane juin 2011

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[2\,;30]$ par :

$$C(x) = 12x + 22 - 25\ln(x).$$

Une usine de composants électroniques fabrique des haut-parleurs.

Le coût de production, en milliers d'euros, de x centaines de haut-parleurs est égal à $C(x)$; x est compris entre 2 et 30.

1. Sachant qu'une centaine de haut-parleurs est vendue 10 milliers d'euros, donner (en milliers d'euros) le prix de vente de x centaines de haut-parleurs.

   On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[2\,;30]$ par

   $$B(x) = -2x - 22 + 25\ln(x).$$

2. Montrer que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé sur la vente de x centaines de haut-parleurs est égal à $B(x)$.

3. On admet que B est dérivable sur l'intervalle $[2\,;30]$. On note B' sa fonction dérivée.

   (a) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;30]$, $B'(x) = \dfrac{25-2x}{x}$.

   (b) Étudier le signe de $B'(x)$.

   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction B.

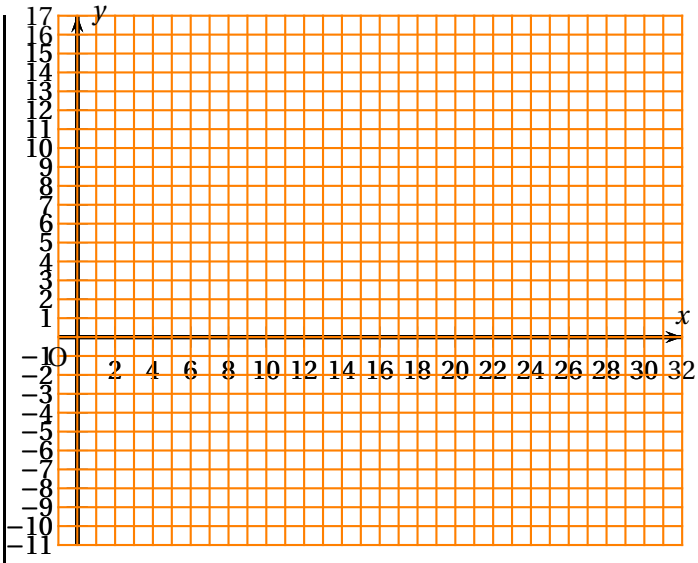
   (d) Pour quelle quantité de haut-parleurs vendue le bénéfice est-il maximal ?

4. (a) Compléter le tableau de valeurs donné en annexe.

   (b) Tracer dans le repère fourni en annexe la courbe représentative de la fonction B.

5. En utilisant le graphique, déterminer pour quelles quantités produites le bénéfice est supérieur à 10 000 €.

x	2	4	6	10	12,5	14	20	24	30
$B(x)$									



II Pondichéry avril 2011

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;8]$ par

$$f(x) = 30\ln(x) + 10 - 10x.$$

1. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;8]$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;8]$, $f'(x) = \dfrac{30-10x}{x}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;8]$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. (*On arrondira les résultats au dixième*).

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$				11,6				

4. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthononné.

   Unités graphiques : 1 *cm pour* 1 *unité.*

   Chaque jour un artisan fabrique x objets (x étant compris entre 1 et 8).

   Le bénéfice, en **dizaines d'euros**, réalisé pour la vente de ces x objets est égal à $f(x)$.

5. Combien faut-il produire d'objets pour que le bénéfice soit maximal ? Que vaut ce bénéfice maximal à un euro près ?

6. Déterminer à partir de quelle quantité d'objets l'artisan travaille à perte.

III Pondichéry avril 2010

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-0,5\ ;\ 5]$ par

$$f(x) = x^2 - 9x + 14\ln(x+1).$$

Dans le repère ci-dessous, la courbe $(\mathscr{C}_f)$ est sa courbe représentative.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-0,5\ ;\ 5]$ et on note f' sa fonction dérivée.

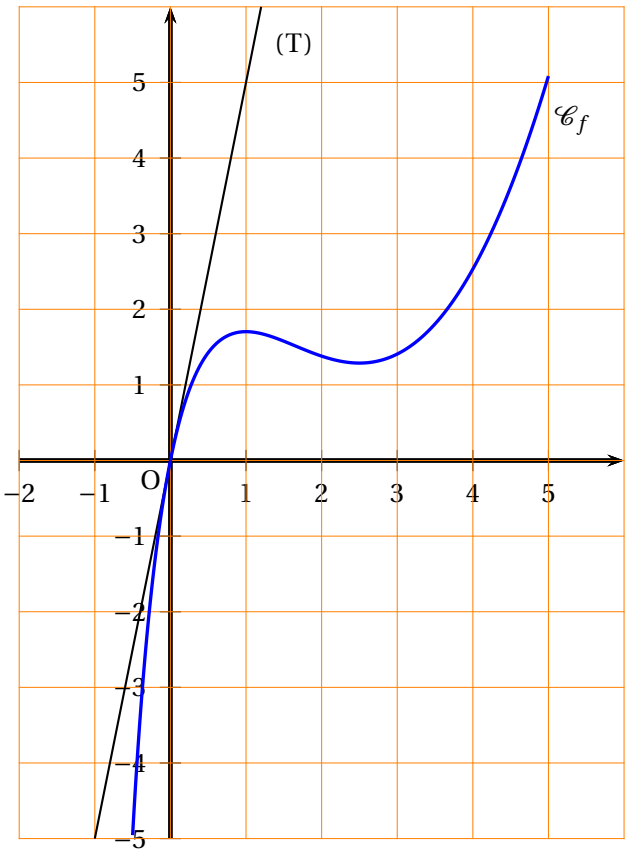
Partie A

Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Donner le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 1,5$.

Partie B

1. Calculer $f'(x)$.
2. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{(2x-5)(x-1)}{x+1}$.
3. En remarquant que $(x+1)$ est strictement positif sur l'intervalle $[-0,5\ ;\ 5]$, et à l'aide d'un tableau de signes déterminer le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur ce même intervalle.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.



IV Réunion septembre 2009

Depuis quelques années, le nombre de personnes tuées sur les routes de France a considérablement diminué. Le tableau suivant présente le bilan de l'année 2001 à l'année 2007.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de personnes	8 160	7 655	6 058	5 530	5 318	4 942	4 838

Source : site officiel de la sécurité routière

Le nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$ est donné en annexe à rendre avec la copie.

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée sur l'annexe est la courbe représentative d'une fonction f étudiée dans la partie B.

Partie A : *Dans cette partie, on ne tiendra pas compte de la courbe $\mathscr{C}_f$*

1. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x de la série $(x_i\ ;\ y_i)$ obtenue par la méthode des moindres carrés. (arrondir les coefficients à l'unité).
2. À partir des calculs ci-dessus, on décide de réaliser un ajustement affine à l'aide de la droite d'équation $y = -580x + 8\,400$. Tracer cette droite sur le graphique de l'annexe à rendre avec la copie.
3. Déterminer le nombre de tués prévus en 2010 par ce modèle. Indiquer la méthode utilisée.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 15]$ par

$$f(x) = -1\,900\ln(x) + 8\,400.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur ce même intervalle.

1. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Justifier que $f'(x)$ est négatif sur l'intervalle $[1\ ;\ 15]$.
   (c) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[1\ ;\ 15]$.

   Dans la suite de cette partie, on décide de modéliser l'évolution du nombre de personnes tuées sur les routes de France à l'aide de la fonction f.
2. Déterminer par le calcul le nombre de tués prévus en 2010 par ce modèle (arrondir à l'unité).

Partie C :

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Parmi les deux modèles étudiés dans la partie A et la partie B, indiquer celui qui ne permet pas d'obtenir une prévision réaliste en 2015. Justifier la réponse.