Exercices de statistiques

I Mercatique-CFE juin 2009

Le tableau ci dessous retrace l'évolution sur une vingtaine d'années du record du monde de natation à l'épreuve du 100 mètres nage libre hommes.

	Année	Rang de l'année x_i	Temps en secondes y_i
Rowdy Gaines	1981	1	49,36
Matt Biondi	1985	5	48,95
Matt Biondi	1986	6	48,74
Matt Biondi	1988	8	48,42
Alexander Popov	1994	14	48,21
Pieter Van Hoogenband	2000	20	47,84

Source. Site officiel du mouvement olympique.

Une représentation du nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$ est donnée en annexe 1 à rendre avec la copie.

1. (a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au millième).

   Pour l'étude qui suit, on retient comme ajustement affine la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -0,08x + 49,2$.

   (b) Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique de l'annexe 1 à rendre avec la copie.

   (c) En utilisant ce modèle d'ajustement, donner une estimation du temps du record du monde à l'épreuve du 100 mètres nage libre hommes en 2008.

2. (a) Calculer le taux d'évolution du temps du record du monde à l'épreuve du 100 mètres nage libre hommes entre 1981 et 2000 (arrondir le résultat à 0,01 %).

   (b) Sur les dix-neuf années de 1981 à 2000, le temps du record du monde à l'épreuve du 100 mètres nage libre hommes a été amélioré chaque année en moyenne de 0,164 %.

   Expliquer comment obtenir ce résultat.

   (c) On suppose qu'à partir de l'année 2000 l'évolution va se poursuivre sur le même rythme, c'est-à-dire que chaque année le temps de ce record baissera de 0,164 %.

   Calculer, selon ce modèle, une estimation du temps du record du monde à l'épreuve du 100 mètres nage libre hommes en 2008.

3. Pendant les jeux olympiques de Pékin, lors de l'été 2008, Eamon Sullivan a abaissé le temps du record à 47,05 secondes.

   Parmi les deux modèles précédents, indiquer celui qui donne la meilleure approximation.

II Métropole Mercatique juin 2008

Une entreprise a acheté une machine en 2000 pour une valeur de 50 000 € et a noté la valeur de cette machine sur le marché de l'occasion jusqu'en 2005. Les résultats sont notés dans le tableau suivant :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Valeur de la machine (en €) y_i	50 000	42 000	36 000	32 000	26 500	22 000

Partie 1

Une représentation du nuage de points $(x_i\ ;\ \check{D}y_i)$ est donnée en annexe, à rendre avec la copie.

1. ¿ l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés (*arrondir les coefficients à l'unité*).

   Pour l'étude qui suit, on retient comme ajustement affine la droite Δ d'équation $y = -5\,440x + 48\,400$.

2. Tracer la droite Δ sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie.
3. En supposant que ce modèle reste valable pour les cinq années à venir, prévoir une estimation de la valeur de cette machine en 2007, puis en 2010.
4. Commenter le dernier résultat.

Partie II

Le service comptable de cette entreprise remarque que pendant les années 2000 à 2005 la machine s'est dépréciée d'environ 15 % par an. Il suppose alors qu'à partir de 2005 la baisse annuelle sera de 15 %. Il pose $v_0 = 22\,000$ et note (v_n) la suite donnant la valeur estimée, selon ce modèle, de la machine au bout de n années de fonctionnement à partir de 2005.

Ainsi, v_1 est la valeur estimée de la machine en 2006.

1. (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; déterminer sa raison.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n = 22\,000 \times (0,85)^n$.

2. Le tableau suivant est un extrait d'une feuille de calculs. II donne la valeur estimée v_n de la machine pour les années 2005 à 2011. Le format de la colonne D est un format numérique à zéro décimale.

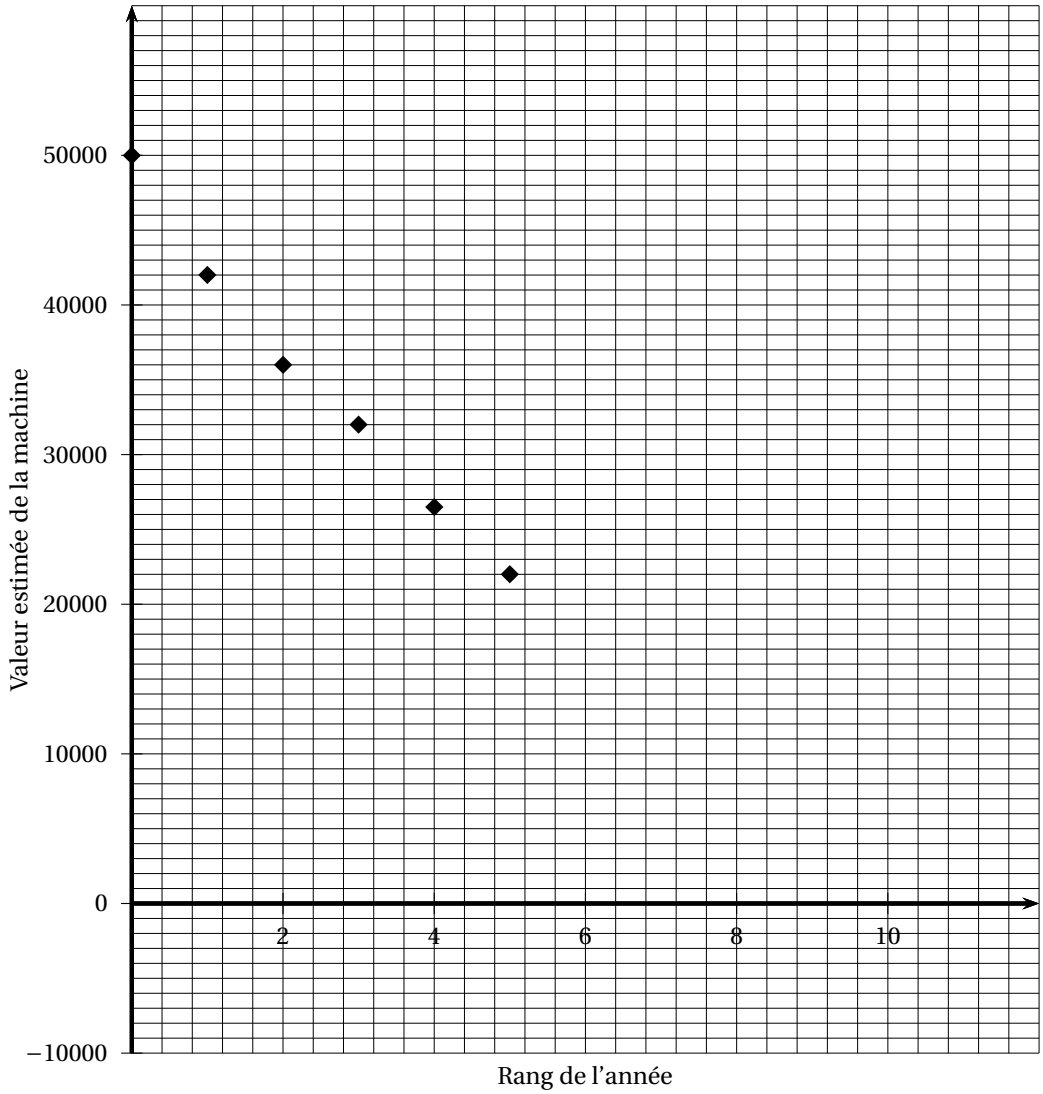
	A	B	C	D
1	Année	Valeur réelle de la machine	Rang de l'année à partir de 2005	Valeur estimée de la machine
2	2000	50 000		
3	2001	42 000		
4	2002	36 000		
5	2003	32 000		
6	2004	26 500		
7	2005	22 000	0	22 000
8	2006		1	18 700
9	2007		2	15 895
10	2008		3	13 511
11	2009		4	11 484
12	2010		5	9 762
13	2011		6	8 297

Donner une formule qui, entrée dans la cellule D8, permet, par recopie vers le bas, d'obtenir la plage de cellules D8 :D13.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Selon ce modèle, à partir de quelle année la machine aura-t-elle une valeur inférieure à 5 000 € ?

Annexe à rendre avec la copie



Correction

I Mercatique-CFE juin 2009

1. (a) À l'aide la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés est : $\boxed{y = -0,0764x + 49,274}$.

   (b) Voir graphique à la fin de l'exercice

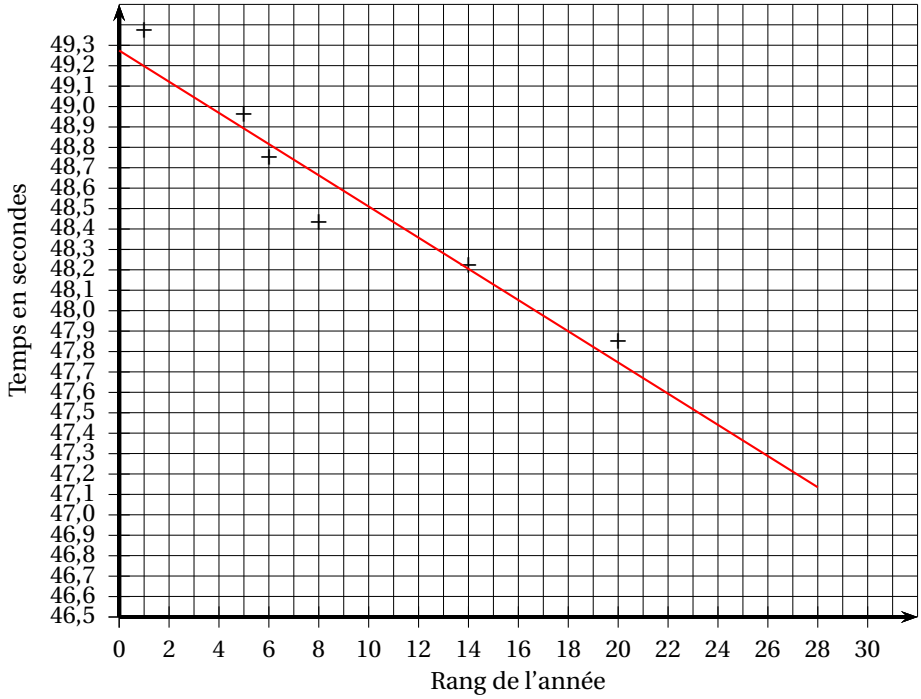
   (c) 2008 correspond à un rang égal à 28 : on remplace x par 28.
   $-0,764 \times 28 + 49,274 \approx 46,96$.
   $\boxed{\text{Avec cet ajustement, on peut envisager un record du monde en 2008 de 46,96 s}}$.

2. (a) Le taux d'évolution entre 1981 et 2000 est : $\dfrac{47,84 - 49,36}{49,36} \approx -0,0307$, soit une baisse d'environ 3,07 %.

   (b) Petite erreur de formulation de la question : de 1981 à 2000, cela fait 20 ans, mais 19 changements d'années.
   Notons t le taux moyen annuel d'évolution du record : on a, en utilisant les coefficients multiplicateurs :
   $(1-t)^{19} = 1 - 0,0307 = 0,693$. On en déduit : $1 - t = 0,693^{\frac{1}{19}}$ d'o˘ $t = 1 - 0,693^{\frac{1}{19}} \approx 0,001639 \approx \boxed{0,164\,\%}$

   (c) Avec ce modèle, on obtiendrait en 2008 un record de : $49,36 \times \left(1 - \dfrac{0,164}{100}\right)^{27} \approx \boxed{47,22}$ s.

3. L'écart entre la valeur réelle du record et la valeur estimée est de 9 centièmes de seconde avec la première méthode et de 17 centièmes avec la seconde méthode.
   C'est la première méthode qui a donné la meilleure approximation.



II Métropole Mercatique juin 2008

Partie 1

1. La calculatrice donne $y = -5443x + 48357$.

2. Voir plus bas.

3. Valeur de cette machine en 2007 :
   - par lecture graphique environ 10 000 €;
   - en utilisant l'équation $y = -5440x + 48400$, on trouve 10 320 €.
   Valeur de cette machine en 2010 : en utilisant l'équation on trouve −6 000 €.

4. Le dernier résultat signifie que garder la machine au delà de 2009 fera perdre de l'argent à l'entreprise.

Partie II

1. (a) Baisser chaque année de 15 %, c'est multiplier par $1 - 0,15 = 0,85$. Donc $v_{n+1} = 0,85v_n$.
   La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = 2200$.

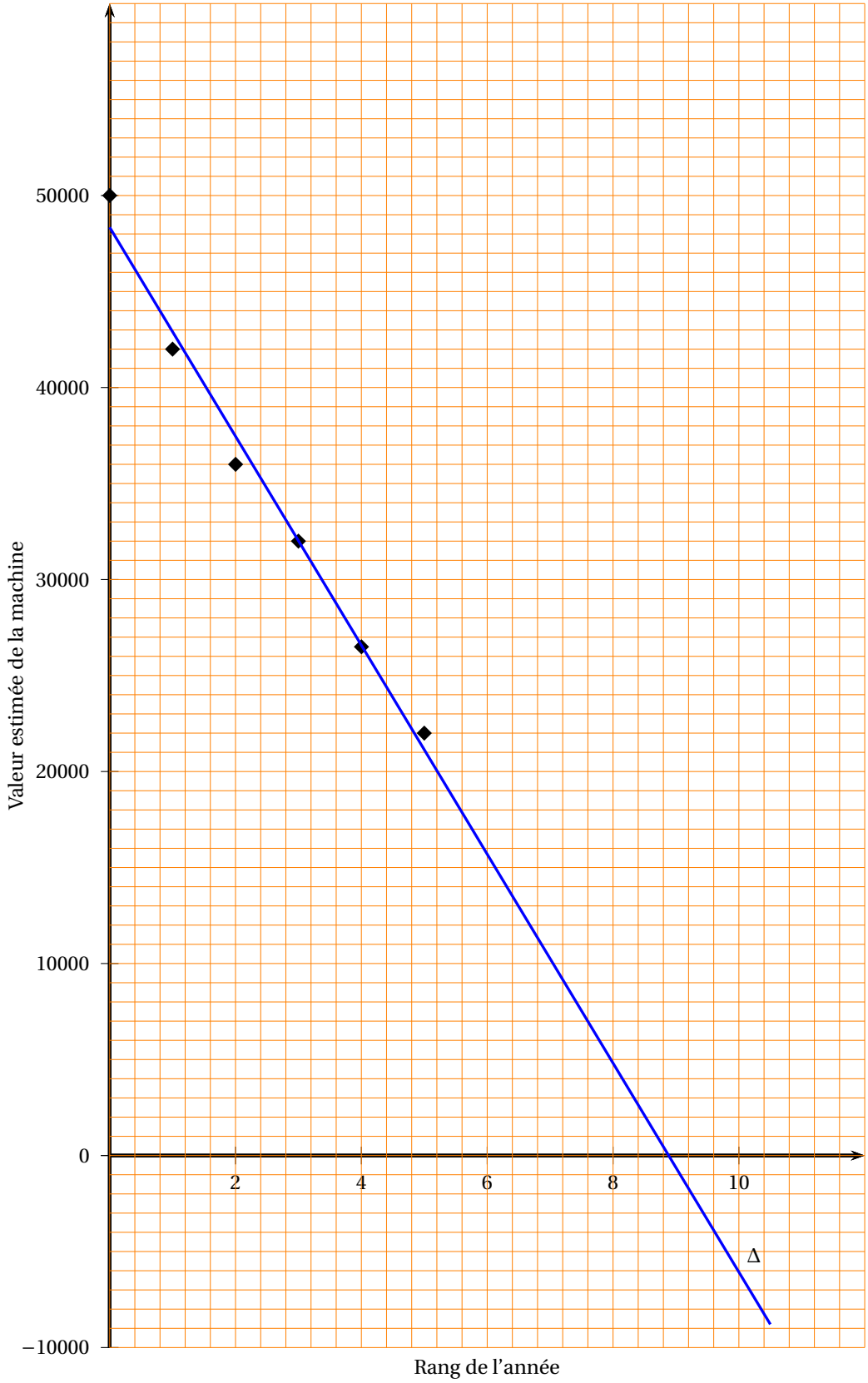
(b) On sait que $v_n = v_0 \times q^n = 2\,200 \times 0,85^n$.

2. La formule est : = D7 * 0,85 ou encore D7 * (0,85)^{C}8.

Selon ce modà¨le, la machine aura une valeur inférieure à 5 000 € à partir de 2015.

Méthode 1 : on calcule les termes successifs de la suite :

22 000, 18 700, 15 895, 13 510,80, 11 484,10, 9 761,52, 8 297,29, 7 152,70, 5 994,79, 5 095,57, 4 331,24.

Méthode 2 : on résout l'inéquation $22\,000 \times 0,85^n < 5\,000$; on obtient $n > 9,1$ soit n au moins égal à 10.

3. **Annexe à rendre avec la copie**