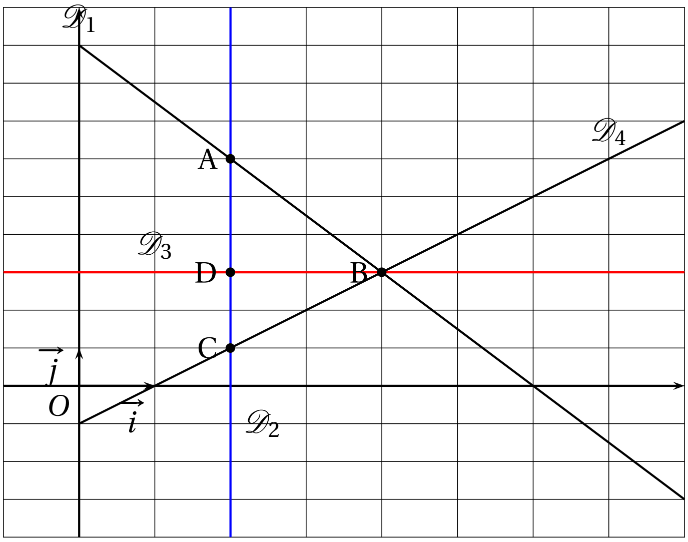
Optimisation linéaire

Activité préparatoire page 49

1. $\mathscr{D}_1$ passe par les points $A(2\ ;\ 6)$ et $B(4\ ;\ 3)$.
   Le coefficient directeur vaut $a_1 = -\dfrac{3}{2}$. L'équation réduite est : $y = a_1x + b_1$ donc $y = -\dfrac{3}{2}x + b_1$.
   Pour $x = 2$, n doit avoir $y = 6$ donc $6 = -\dfrac{3}{2} \times 2 + b_1$: $b_1 = 9$.
   L'équation est : $y = -\dfrac{3}{2}x + 9$.
   On obtient également : $2y = -3x + 18$ d'où $3x + 2y = 18$.
2. Soit $\mathscr{D}_2$ la droite passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées : son équation est $x = 2$.
3. $\mathscr{D}_3$ passe par B et est parallèle à l'axe des abscisses : son équation est $y = 3$.
4. C est le point d'abscisses 1 de $\mathscr{D}_2$: C(1 ; 2).
5. Soit $\mathscr{D}_4$ la droite d'équation $x - y = 1$. Cela équivaut à $y = x - 1$.



2) On s'intéresse au système : $\begin{cases} 3x + 2y \leqslant 18 \\ x \geqslant 2 \\ y \leqslant 3 \\ x - y \leqslant 1 \end{cases}$.

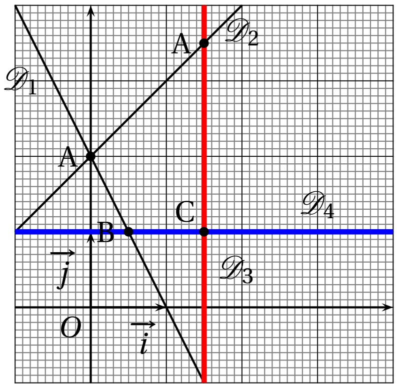
1. Avec le point $(0,0)$, on obtient l'inégalité $0 \leqslant 18$ sui est vraie. Le demi-plan solution est le demi-plan de frontière $\mathscr{D}_1$ et contenant $(0\,;0)$.
   On hachure le demi-plan qui ne convient pas.
2.
3.
4.

Finalement, l'ensemble des solutions est l'intérieur du triangle BCD, bords compris

Activité préparatoire n° 2 page 51

I

1. Soient les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations $2x+y=2$ et $-x+y=2$.



2. En résolvant le système $\begin{cases} 2x+y=2 \\ -x+y=2 \end{cases}$, on trouve $(x\,;\,y)=(0,2)$.
   Les deux droites se coupent au point de coordonnées $(0\,;\,2)$.
3. Les équations réduites sont : $y=-2x+2$ et $y=x+2$.
4. $\mathscr{D}_3$ a pour équation $x=1{,}5$ et $\mathscr{D}_4$ $y=1$.
5. voir figure

II

1. Les inégalités seront larges.
2. Demi-plan de frontière $\mathscr{D}_1$, contenant ABCD : $2x+y\geqslant 2$.
3. Demi-plan de frontière $\mathscr{D}_2$, contenant ABCD : $-x+y\leqslant 2$.
4. Demi-plan situé à gauche de $\mathscr{D}_3$: $x\leqslant 1{,}5$
5. Demi-plan situé au-dessus de $\mathscr{D}_4$: $y\geqslant 1$.
6. ABCD est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant le système : $\begin{cases} 2x+y\geqslant 2 \\ -x+y\leqslant 2 \\ x\leqslant 1{,}5 \\ y\geqslant 1 \end{cases}$.

I Régionnement du plan

Le plan est muni d'un repère.
a, b et c sont trois nombres ; a et b ne sont pas simultanément nuls.

I.1 Droite d'équation $ax+by=c$

On a vu en seconde que l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant une relation du type $ax+by=c$ est une droite et réciproquement, pour une droite donnée, il existe trois nombres a, b et c, a et b non nuls simultanément caractérisée par une équation $ax+by=c$.
Si $b\neq 0$, on peut se ramener à une équation réduite : $y=-\frac{a}{b}c+\frac{c}{b}$.
Si $b=0$, alors $a\neq 0$ et $x=\frac{c}{a}$.

Exemples :

1. $2x+3y=7$ se transforme en $3y=-2x+7$ puis $y=\frac{-2}{3}x+\frac{7}{3}$ (droite de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$)
2. $5x=7$ se transforme en $x=\frac{7}{5}$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées)

I.2 Demi-plan et frontières

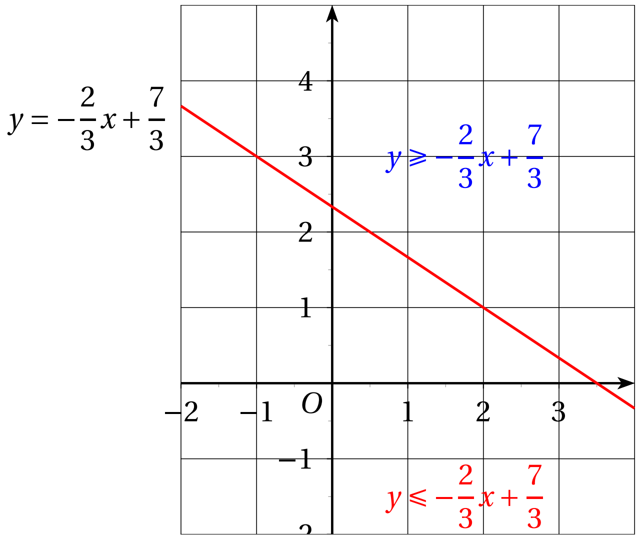
La droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax+by=c$ partage le plan en deux demi-plans, de frontière $\mathscr{D}$.

- L'un est caractérisé par la relation $ax+by<c$ (frontière $\mathscr{D}$ exclue)
- L'autre est caractérisé par la relation $ax+by>c$ (frontière $\mathscr{D}$ exclue)

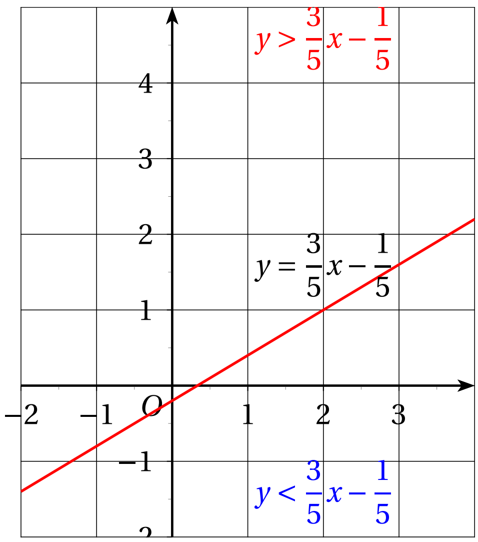
Pour savoir quelle inéquation, on peut tester sur les coordonnées d'un point connu ou raisonner sur les inéquations réduites.

Exemples :

1. Soit l'inéquation $2x+3y\leqslant 7$; elle es transforme en $3y\leqslant -2x+7$ puis $y\leqslant -\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$.
$y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ est l'équation d'une droite. Pour une valeur x donnée, le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ avec $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ appartient à cette droite.
Les points de même abscisses x, mais avec $y<-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ sont en dessous de ce point.



2. Soit l'inéquation $3x-5y\geqslant 1$; elle se transforme en $-5y\geqslant -3x+1$ puis $y\leqslant \frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$.
$y=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$ est l'équation d'une droite. Pour une valeur x donnée, le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ avec $y=\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$ appartient à cette droite.
Les points de même abscisses x, mais avec $y<\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}$ sont en dessous de ce point.



I.3 Résolution graphique d'un système

Résoudre graphiquement un système d'équations linéaires à deux inconnues x et y revient à déterminer la région du plan telle qu l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient simultanément chaque inéquation. Cette région est l'intersection de chaque demi-plan, solution de chacune des inéquations.

II Programmation linéaire

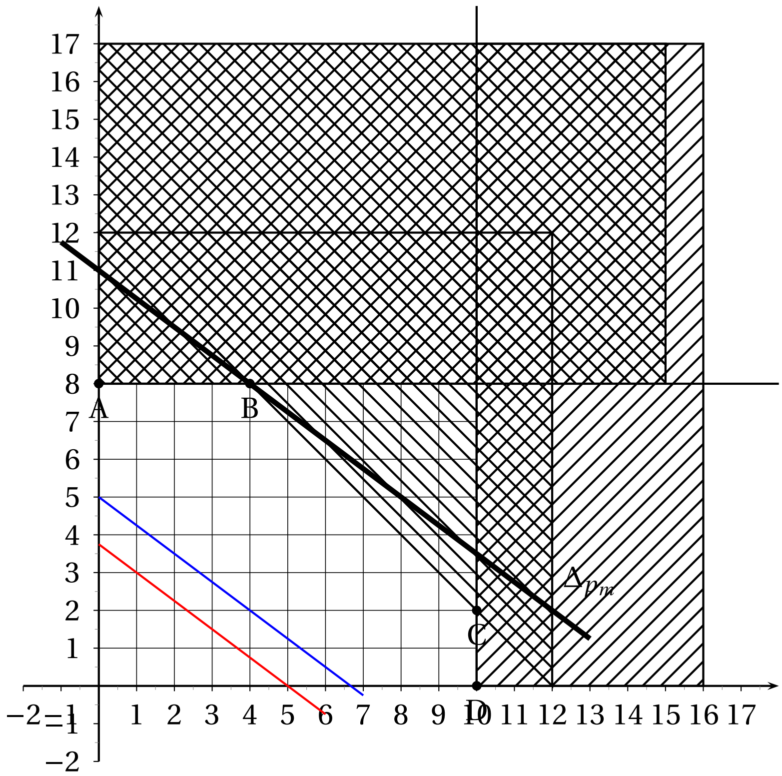
Activité 3 pages 64-65

1.)

1. x et y sont des nombres d'objets, donc des nombres entiers naturels.
2. En traduisant les données, on obtient le système : $\begin{cases} x \leqslant 10 \\ y \leqslant 8 \\ x+y \leqslant 12 \end{cases}$.
3. Soit p le profit : $p = 120x + 160y$.
4. Il faut donc maximiser l'expression $120x + 160y$ avec les contraintes $\begin{cases} x \leqslant 10 \\ y \leqslant 8 \\ x+y \leqslant 12 \end{cases}$..

2).

1. **Tracés** :



La partie du plan solution du système de contraintes est le polygone ABCD.

2. **Optimisation**

Traçons la droite Δ_1 d'équation : $120x + 160y = 600$ qui se simplifie en $3x + 4y = 15$ d'où $y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$.
On regarde alors les intersubsections de cette droite avec les nœuds du quadrillage, pour tourver des points à coordonnées entières.
On trouve plusieurs couples solutions (1 ; 3) et 5 ; 0.

Traçons la droite Δ_2 d'équation $120x + 160y = 800$. Cela correspond à $3x + 4y = 20$ d'où $y = \frac{-3x + 20}{4}$.
La droite Δ_m qui correspondra à un profit maximal p_m a pour équation : $120x+160y = p_m$ ou $y = \frac{p_m - 120x}{160}$.
Δ_m est parallèle à Δ_1 ou Δ_2.
L'ordonnée à l'origine est $\frac{p_m}{160}$; plus p_m est grand, plus cette ordonnée à l'origine est grande.
On est donc amené à tracer la droite parallèle à Δ_1, d'ordonnée à l'origine la plus grande possible et qui a

une intersubsection avec la portion du plan solution du système de contraintes.
C'est la droite qui passe par B(4 ; 8).

Le profit est alors de $4 \times 120 + 8 \times 160 = 1\,760$ €.

Programmation linéaire

1. **Principe**
La programmation linéaire consiste à optimiser graphiquement une expression linéaire $ax + by$, pour les points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ d'une région du plan caractérisée par un système d'inéquations linéaires correspondant à des contraintes.
Optimiser une expression signifie la minimiser s'il s'agit d'un coût ou la maximiser s'il s'agit d'un profit.
Les variables x et y désignent généralement les quantités de deux produits ou services achetés ou vendus par une entreprise ou un particulier.
Les contraintes représentent des limites liées à l'entreprise (ou au particulier) ou à son environnement.
L'expression à optimiser, qui dépend de deux variables x et y, représente pour l'entreprise (ou le particulier) soit un coût que l'on cherche à minimiser, soit un profit que l'on cherche à maximiser.
Le but de la programmation linéaire est ainsi de déterminer graphiquement un programme optimal, c'est-à-dire de trouver les valeurs de x et de y permettant soit de minimiser les coûts, soit de maximiser les profits.
2. **Étapes de résolution d'un programme linéaire**
La résolution d'un programme linéaire se déroule en deux temps :
   (a) Traduction algébrique des données du problème sous forme de programme linéaire :
   - choix des variables x et y ;
   - mise en inéquation des contraintes ;
   - détermination de l'expression linéaire $ax + by$ à optimiser.

   (b) Résolution graphique du programme linéaire :
   - détermination du programme réalisable par la résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires précédemment déterminé ;
   - détermination du programme optimal par l'optimisation graphique de l'expression linéaire $ax + by$.

‘