TCFE : contrôle n° 2

I

Reproduire et compléter le tableau suivant :

Époque	Époque 0	Époque 1	Époque 2
Indice	100	108	117,1
Prix (€)	3,5	3.78	4,10

Explications : il y a proportionnalité entre les prix et les indices.

$$\frac{3,5\times 108}{100}=3,78 \text{ et } \frac{100\times 4,10}{3,5}\approx 117,1.$$

II

1. Le prix d'un article a augmenté de 2 % par mois chaque mois de l'année 2006.
   Le coefficient multiplicateur annuel est $1+\frac{2}{100}=1,02$.
   Pour 12 mois, le coefficient multiplicateur global est $1,02^{12}\approx 1.27$ donc le taux correspondant est d'environ $\boxed{27\ \%}$, donc plus de 24 %.

   Les questions suivantes se rapportent au tableau ci-dessous. C'est un extrait du tableau de l'indice de référence des loyers en France, base 100 au deuxième trimestre 2004, publié par l'INSEE. Les indices sont calculés à la fin de chaque trimestre.

Période	Indice de référence
Premier trimestre 2003	97,10
Premier trimestre 2004	99,33
Premier trimestre 2005	
Premier trimestre 2006	104,61

Source : INSEE

2. Sur une année, du premier trimestre 2004 au premier trimestre 2005, les loyers ont augmenté de 2,79 %.
   L'indice de référence au premier janvier 2005 est :
   $99,33\times\left(1+\frac{2,79}{100}\right)=99,33\times 1,0279\approx\boxed{102,10}$.
3. Entre le premier trimestre 2003 (indice 97,10) et le premier trimestre 2004 (indice 99,33), le taux annuel d'évolution des loyers est :
   $\frac{99,33-97,10}{97,10}\approx 0.023\approx\boxed{2,30\,\%}$.
4. Entre le premier trimestre 2004 (indice 99,33) et le premier trimestre 2006 (indice 104,61) le taux moyen annuel d'évolution des loyers arrondi à 0,01 % est t :
   Le coefficient multiplicateur global est :
   $\frac{104,61}{99,33}\approx 1,05315614618$.
   Ce même coefficient multiplicateur global vaut $(1+t)^2$.
   On en déduit $(1+t)^2\approx 1,05315614618$ donc
   $1+t=1,05315614618^{\frac{1}{2}}$ d'où $t\approx 1,07734294542^{\frac{1}{3}}-1\approx 0,0262339626907\approx\boxed{2,62\,\%}$.

III

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r=5$; $u_0=4$.
   $u_n=u_0+nr$ donc $u_7=u_0+7r=4+7\times 5=39$: $\boxed{u_7=39}$.
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison r ;
   $u_5=3$; $u_8=21$.
   (a) $u_n=u_p+(n-p)r$ donc $u_8=u_5+(8-5)r$ d'où $21=3+3r$.
   On en déduit : $3r=18$ d'où $\boxed{r=6}$.
   (b) Alors : $u_{10}=u_8+(10-8)r=u_8+2r=21+2\times 6=33$; $\boxed{u_{10}=33}$.
3. La suite (v_n) est géométrique de raison $q=3$; $u_0=5$.
   Pour tout n, $u_n=u_0\times q^n$ donc $u_3=u_0\times q^3=5\times 3^3=5\times 27=135$; $\boxed{u_3=135}$.

IV

Pour un prêt de 10 000 € remboursable en six annuités, un commerçant s'est vu proposer par deux établissements de crédits les deux formules suivantes :

- Première formule : les six annuités sont les six termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 025 € et de raison 500 €.
- Deuxième formule : les six annuités sont les six termes d'une suite géométrique de premier terme 1 530 € et de raison 1,15.

1. **Première formule :**
   Notons $u_0=1025$ le montant du premier remboursement et $r=500$ la raison.
   Les montants de l'année n sont alors u_n.
   La somme totale remboursée au bout de six ans est $\boxed{S=u_0+u_1+\cdots+u_5}$.
   C'est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, donc :
   $S=6\times\frac{u_0+u_5}{2}$ avec $u_0=1025$ et
   $u_5=u_0+5r=1025+5\times 500=1025+2500=3525$.
   Alors : $S=6\times\frac{1025+3525}{2}=\boxed{13650}$.

   Deuxième formule :
   Notons $v_0=1530$ le montant du premier remboursement et $q=1,15$ la raison.
   Les montants de l'année n sont alors v_n.
   Le montant total remboursé est alors $\boxed{S'=v_0+v_1+\cdots+v_5}$.
   C'est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
   $S'=v_0\times\frac{q^5-1}{q-1}=1530\times\frac{1,15^6-1}{1,15-1}\approx\boxed{13393,22}$.
2. $S'<S$ donc la deuxième formiule est plus avantageuse pour le commerçant.

V

Monsieur Guillaume, artisan menuisier, désire acquérir une machine en 2011.
Au 1er janvier 2007, il a placé la somme de 15 000 euros, à intérêts composés au taux annuel de 6,75 %.
On note u_n le capital, exprimé en euros, disponible au 1er janvier de l'année $(2007+n)$.

a) $u_1=15000\times\left(1+\frac{6,75}{100}\right)=15000\times 1,0675=\boxed{16012,5}$
   $u_2=u_1\times 1,0675\approx\boxed{17093,34}$
   La suite (u_n) est une suite géométrique, de premier terme $u_0=15000$ et de raison $q=1,0675$.
   On en déduit que $u_n=u_0\times q^n$. La somme disponible au 1er janvier 2011 est $u_4=u_0\times q^4=15000\times 1,0675^4\approx\boxed{19478,83}$.
   Il ne peut donc pas payer les 21 500 euros nécessaires à l'acquisition de la machine.
   Il lui manque 2 021,17 euros, soit environ 2 000 euros.

b) Soit u_0 la somme placée au départ.
   Il faut que $u_0\times 1,0675^4\geqslant 21500$ donc
   $u_0\geqslant\frac{21500}{1,0675^4}\approx\boxed{16556,44}$.
   Il faut qu'il place au minimum 16 556,44 euros minimum.