TCFE : correction du contrôle sur la fonction ln

I

a) $\ln(8) = \ln\left(2^3\right) = \boxed{3\ln(2)}$; b) $\ln\left(\frac{1}{16}\right) = -\ln(16) = -\ln\left(2^4\right) = \boxed{-4\ln(2)}$; c) $\ln(\sqrt{2}) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$

II

On place un capital de 1 000 € à intérêts composés au taux annuel de 3 %.
On note C_n la valeur acquise par ce capital au bout de n années.

1. Le coefficient multiplicateur annuel est $q = 1 + \frac{3}{100} = 1,03$.
   On en déduit que $C_n = C_0 \times q^n = \boxed{1\,000 \times 1,03^n}$.
2. $C_n \geqslant 2\,500 \Leftrightarrow 1\,000 \times 1,03^n \geqslant 2\,500 \Leftrightarrow 1,03^n \geqslant \frac{2\,500}{1\,000} = 2,5$.
   En appliquant la fonction logarithme qui est croissante, on trouve que l'on doit avoir :
   $\ln\left(1,03^n\right) \geqslant \ln(2,5) \Leftrightarrow n\ln(1,03) \geqslant \ln(2,5) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(2,5)}{\ln(1,03)} \approx 30,99$.
   La plus petite valeur de n pour laquelle la valeur acquise sera supérieure à 2 500 €est $\boxed{n = 31}$.

III

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(x) + 3x^2 - 5$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   $f'(x) = \frac{1}{x} + 3 \times 2x = \boxed{\frac{1}{x} + 6x}$.

b) $f(x) = \ln(2x+1)$ sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.
   $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x+1$ donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u'(x) = 2$.
   On en déduit que : $\boxed{f'(x) = \frac{2}{2x+1}}$.

c) $f(x) = \ln\left(3x^2 + 5x + 7\right)$ sur $\mathbb{R}$.
   De même : $\boxed{?'(x) = \frac{6x+5}{3x^2+5x+7}}$.

IV

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,13]$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - 3x + 10.$$

1. 500 litres correspondent à $x = 5$; le coût moyen correspondant est $f(5) = 5\ln(5) - 5 \approx \boxed{3,05 €}$.
2. $f = uv + w$ avec ž$(x) = x$, $v(x) = \ln(x)$ et $w(x) = -3x = 10$.
   Alors $f' = (ux+w)' = (uv)' + w' = u'v + uv' + w'$ avec $u'(x) = 1$, $v'(x) = \frac{1}{x}$ et $w'(x) = -3$.
   Par conséquent : $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 3 = \ln(x) + 1 - 3 = \boxed{\ln(x) - 2}$.
3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2$; or $\ln\left(e^2\right) = 2\ln(e) = 2 \times 1 = 2$ donc $f'(x) = 2$ pour $\boxed{x = e^2}$.
4. $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant 2 \leqslant x \geqslant e^2$ car la fonction ln est croissante.
5. On en déduit le tableau de variation de f :

x	1		e^2		13
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	↘	$f\left(e^2\right) \approx 2,6$	↗	

Le nombre de litres à produire par jour pour que le coût moyen soit minimum est 7389 (car $e^2 \approx 7,389$) ; le prix moyen correspondant est alors d'environ 2,6 €.

V

Partie A : lectures graphiques

1. Le coût de production de 900 pièces est environ égal à 120 milliers d'euros.
2. La fabrication hebdomadaire correspondant à un coût de production de 90 000 € est d'environ 7 centaines, sit environ 700 pièces.
3. Pour que l'entreprise soit bénéficiaire, il faut que la recette soit supérieure au coût, donc pour x compris entre 2 et 14, soit entre 200 et 1400 pièces environ.

Partie B

On admet que la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ est donnée par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 6,5x + 10 + 4,5\ln(x+1).$$

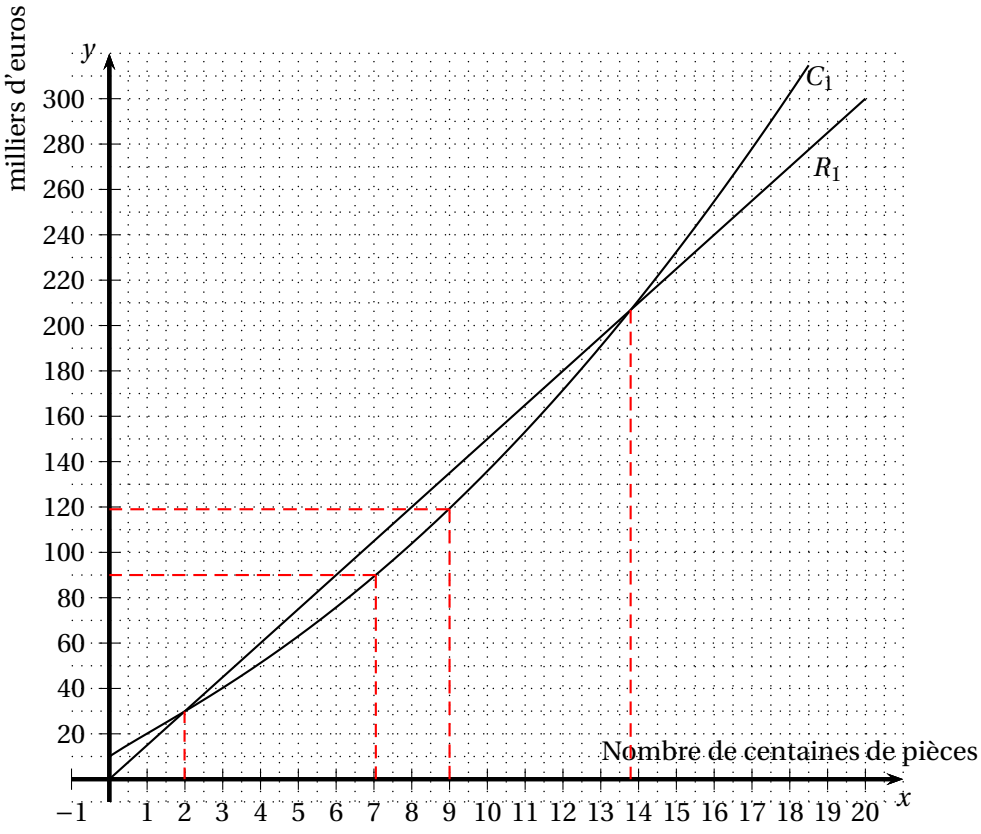
1. (a) Le bénéfice est $B(x) = R(x) - C(x)$
$= 15x - \left(0,5x^2 + 6,5x + 10 + 4,5\ln(x+1)\right)$
$= 15x - 0,5x^2 - 6,5x - 10 - 4,5\ln(x+1)$
$= \boxed{-0,5x^2 + 8,5x - 10 - 4,5\ln(x+1)}$.
On note B' la fonction dérivée de B sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$.

(b) $B'(x) = -0,5 \times 2x + 8,5 - 4,5 \times \dfrac{1}{x+1}$
$= \boxed{-x + 8,5 - \dfrac{4,5}{x+1}}$.

(c) En mettant au même dénominateur, on obtient :
$B'(x) = \dfrac{(-x+8,5)(x+1) - 4,5}{x+1}$
$= \dfrac{-x^2 - x + 8,5x + 8,5 - 4,5}{x+1} = \dfrac{-x^2 + 7,5x + 4}{x+1}$.
Or : $\dfrac{(x+0,5)(8-x)}{x+1} = \dfrac{8x - x^2 + 4 - 0,5x}{x+1}$
$= \dfrac{-x^2 + 7,5x + 4}{x+1}$.
On en déduit que $\boxed{B(x) = \dfrac{(x+0,5)(8-x)}{x+1}}$.

2. (a) Sur $[0\,;20]$, $x+0,5$ est positif de même que $x+1$, donc $B'(x)$ est du signe de $8-x$.

(b) $8-x$ est positif pour $x \leqslant 8$ et négatif pour $x \geqslant 8$, nul pour $x = 8$.
On en déduit le tableau de variation de B :

x	0		8		20
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	-10	↗	$B(8) \approx 16,112$	↘	$\approx -53,7$

3. Le bénéfice est maximal pour $x = 8$, donc une fabrication hebdomadaire de 800 pièces ; ce bénéfice maximal est alors de 16,1212 milliers d'euros, soit environ 16 112 euros