Correction du devoir n° 2

I

1. La valeur de reprise baisse de 20 % par an : le coefficient multiplicateur associé est $c = 1 - \dfrac{20}{100} = 0,8$.
   a. On en déduit que $R_1 = R_0 \times 0,8 = 45\,000 \times 0,8 = \boxed{36\,000}$.
   b. Pour tout n, on a $R_{n+1} = R_n \times 0,8$ donc la suite (R_n) est **géométrique**, de raison $q = 0,8$ et de premier terme $R_0 = 45\,000$.
   c. On en déduit que, pour tout n : $R_n = R_0 q^n$ donc $\boxed{R_n = 45\,000 \times 0,8^n}$.
2. Le prix de la machine augmente de 1 000 € par an.
   On a $P_0 = 45\,000$; pour tout n, $P_{n+1} = P_n + 1\,000$ donc la suite (P_n) est arithmétique, de raison $r = 1\,000$ et de premier terme $P_0 = 45\,000$.
   On en déduit : $P_n = P_0 + nr$ donc $\boxed{P_n = 45\,000 + 1\,000n}$.
3. Cinq ans se sont écoulés, donc $n = 5$.
   Le prix de la machine est alors $P_5 = 45\,000 + 5 \times 1\,000 = \boxed{50\,000}$.
   La valeur de reprise est $R_5 = 45\,000 \times 0,8^5 = 14\,745,6$.
   Il doit donc débourser la différence, soit $50000 - 14745,6 = \boxed{35\,524,40\text{ €}}$.
4. **a.** Au bout de 10 ans, la somme qu'il doit débourser est :
   $P_{10} - R_{10} = (45\,000 + 10 \times 1\,000) - 45\,000 \times 0,8^{10} \approx 50\,168$.
   b. Le pourcentage d'augmentation entre les dépenses de 1999 et 2009 est :
   $\dfrac{50\,168 - 45\,000}{45\,000} \approx \boxed{11,4\,\%}$.

II

Le dépôt initial est $p(0) = 8$ € et chaque mois, le dépôt augmente de 2 €.
$p(n)$ est le dépôt à la fin du n^{e} mois.

1. On a $p(1) = 8 + 2 = \boxed{10}$ et $p(2) = p(1) + 2 = \boxed{12}$.
2. Pour tout n, $P(n+1)p(n) + 2$ donc la suite $\big(p(n)\big)$ est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $p(0) = 8$.
   Pour tout n, $p(n) = p(0) = nr$ donc $\boxed{p(n) = 8 + 2n}$.
3. **a.** La somme totale contenue dans la tirelire au bous de deux mois est $p(0) + p(1) + p(2) = 8 + 10 + 12 = \boxed{30}\ E$.
   b. Au bout de n mois, la somme contenue dans la tirelire est :
   $S(n) = p(0) + p(1) + \cdots + p(n)$; c'est la somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite arithmétique, donc :
   $S_n = \dfrac{(n+1)\big(p(0) + p(n)\big)}{2} = \dfrac{[n+1](8 + 2n + 8)}{2} = \dfrac{(n+1)(2n+16)}{2} = \boxed{(n+1)(n+8)}$.
4. Au bout de 9 mois, la somme contenue dans la tirelire est $(9+1) \times (9+8) = 170$ €, alors qu'au bout de 8 mois, il n'aurait que $(8+1)(8+8) = 9 \times 16 = 144$ €.
   Il doit bien attendre 9 mois pour acheter son vélo.

III

1. On doit multiplier le chiffre d'affaire de 2009 pour obtenir le chiffre d'affaire de 2010 par :
   a. ~~0,23~~ **b.** $\boxed{0,77}$ **c.** ~~−0,23~~ **d.** ~~1,23~~
   le coefficient multiplicateur associé à un taux d'évolution t est $1 + t$; ici $t = -0.23$
2. Le taux d'évolution entre 2011 et 2012 pour que le chiffre d'affaire de 2012 soit le même que celui de 2010 est :
   a. ~~−6,15 %~~ **b.** $\boxed{-5,79\,\%}$ **c.** ~~−0,06 %~~ **d.** ~~0,94 %~~
   $1,061\,5 \times (1 + t) = 1$ d'où $t = \dfrac{1}{1,061\,5} - 1 \approx -0,057\,93$
3. Le taux d'évolution global entre 2009 et 2011 est :
   a. ~~16,85 %~~ **b.** ~~−16,85 %~~ **c.** ~~18,26 %~~ **d.** $\boxed{-18,26\,\%}$
   le coefficient multiplicateur global est $0,77 \times 1,061\,5 \approx 0,817\,35$ d'où $t = 0,817\,4 - 1 = -0,182\,6$
4. Le taux moyen semestriel entre 2009 et 2010 est :
   a. ~~- 11,5 %~~ **b.** ~~11,5 %~~ **c.** $\boxed{-12,25\,\%}$ **d.** ~~−4,26 %~~
   Le coefficient multiplicateur pour l'année est 0,77. Il y a deux semestres. $(1 + t_m)^2 = 0,77$ d'où $t_m = 0,77^{\frac{1}{2}} - 1 \approx -12,25$.

IV

Un potier fabrique des théières et des coupes à fruits originales. Les théières et les coupes à fruits sont munies chacune d'une anse en rotin, fournie par un autre artisan. La fabrication d'une théière nécessite 1,8 kg de terre et 1 h de main d'œuvre. Tandis que celle d'une coupe à fruits nécessite 3,6 kg de terre et 30 min de main d'œuvre.

Étant en rupture de stock, le potier ne dispose pour la semaine que de 162 kg de terre. Par ailleurs il n'a en réserve que 30 anses à théière et 40 anses à coupe à fruits. Enfin, il ne souhaite pas travailler plus de 39 h au cours de la semaine.

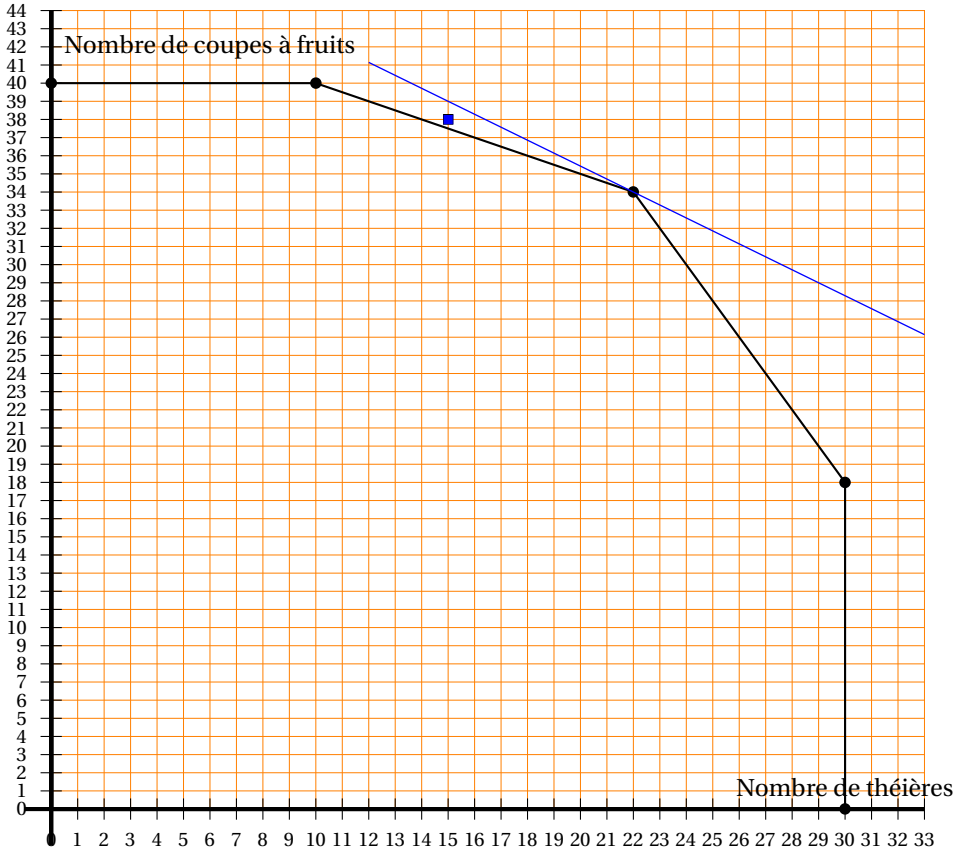
1. Déterminons un système d'inéquations traduisant les contraintes pour la fabrication dans la semaine de x théières et y coupes à fruits.
Le nombre de théières ou de coupes fabriquées doit être entier. $x \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{N}$.
Écrivons l'inéquation correspondant à la contrainte terre : $1{,}8x + 3{,}6y \leqslant 162$ ou en simplifiant $x + 2y \leqslant 90$.
Écrivons l'inéquation correspondant à la contrainte main d'œuvre : $x + 0{,}5y \leqslant 39$ ou $2x + y \leqslant 78$.
Écrivons les inéquations correspondant à la contrainte anse : $0 \leqslant x \leqslant 30$ et $0 \leqslant y \leqslant 40$

Le système d'inéquations est donc $\begin{cases} x \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{N} \\ x + 2y \leqslant 90 \\ 2x + y \leqslant 78 \\ 0 \leqslant x \leqslant 30 \\ 0 \leqslant y \leqslant 40 \end{cases}$

2. Les solutions du système précédent sont les coordonnées de certains points appartenant à la région grisée donnée en annexe 1.
Le potier ne peut pas fabriquer 15 théières et 38 coupes à fruits car le point correspondant n'appartient pas à la zone grisée.
L'inéquation $x + 2y \leqslant 90$ n'est pas vérifiée : $15 + 76 = 91$.

3. Le prix de vente d'une théière est de 45 € et celui d'une coupe à fruits de 63 €. Le potier souhaite maximiser son chiffre d'affaires. Il utilise un tableur pour déterminer le couple $(x\,;\,y)$ qui correspond au profit maximal.
Un extrait de la feuille de calcul est donné en annexe 2.

a. La formule, entrée dans la cellule B1, recopiée vers la droite, puis vers le bas sur la plage B1 : L11 est : =45B$12+63$A1.

b. On suppose que toute la production est vendue. Le potier doit fabriquer dans la semaine pour obtenir un chiffre d'affaires maximal 22 théières et 34 coupes à fruits. Le point de coordonnées (22,34) est le point d'intersection des droites frontières des contraintes terre et main d'œuvre. Il ne peut fabriquer plus car il a épuisé la quantité de terre et d'heures dont il disposait. En traçant la droite d'équation $45x + 63y = 3\,132$ nous pouvons constater que, s'il fabrique moins de théières ou de coupes le bénéfice sera moindre. Les droites de bénéfice sont toutes parallèles entre elles.

c. Son chiffre d'affaires est alors de 3 132 €.