TCFE : contrôle sur la fonction ln

I

Exprimer à l'aide de $\ln(2)$ les nombres suivants :

a) $\ln(8)$; *b)* $\ln\left(\frac{1}{16}\right)$; *c)* $\ln(\sqrt{2})$

II

On place un capital de 1 000 € à intérêts composés au taux annuel de 3 %.
On note C_n la valeur acquise par ce capital au bout de n années.

1. Exprimer C_n en fonction de n.
2. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la valeur acquise sera supérieure à 2 500 €.
   On utilisera les logarithmes pour répondre à la question.

III

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(x) + 3x^2 - 5$ sur $]0\,;\,+\infty[$

b) $f(x) = \ln(2x+1)$ sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

c) $f(x) = \ln\left(3x^2 + 5x + 7\right)$ sur $\mathbb{R}$

IV

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,13]$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - 3x + 10.$$

Une entreprise fabrique du dissolvant chimique. Lorsque l'entreprise fabrique x centaines de litres par jour, le **coût moyen** de production du litre est égal à $f(x)$ (x est compris entre 1 centaine et 13 centaines). Ce coût est exprimé en euros.

1. Si l'entreprise produit 500 litres par jour, quel sera le coût moyen de production du litre, en euros, arrondi au centime ?
2. Montrer que $f'(x) = \ln(x) - 2$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[1\,;\,13]$.
3. Rappel ; on note e le nombre tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$ ($\mathrm{e} \approx 2,72$).
   Montrer que $f'(x)$ s'annule pour $x = \mathrm{e}^2$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ puis établir le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1\,;\,13]$.
5. En déduire le nombre de litres à produire par jour pour que le coût moyen de production du litre soit minimum.
   On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au litre près.

   Préciser alors la valeur arrondie au centime du coût moyen de production du litre correspondant.

V

Une entreprise fabrique des pièces de haute technologie. La fabrication hebdomadaire est limitée à 2 000 pièces. Le prix de vente de 100 pièces est fixé à 15 000 €.

La recette en milliers d'euros, obtenue pour la vente de x centaines de pièces est donc $R(x) = 15x$.

Le graphique fourni en annexe donne la représentation graphique R_1 de la fonction R et la représentation graphique C_1 de la fonction coût de production notée C sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.

Partie A : lectures graphiques

Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le coût de production de 900 pièces ?
2. Quelle fabrication hebdomadaire correspond à un coût de production de 90 000 € ?
3. Combien l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre dc pièces pour être bénéficiaire ?

Partie B

On admet que la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ est donnée par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 6,5x + 10 + 4,5\ln(x+1).$$

On rappelle que le coût de production, en milliers d'euros, est le nombre $C(x)$, x étant le nombre de centaines de pièces produites (x est compris entre 0 et 20 centaines de pièces). On admet que toutes les pièces produites sont vendues.

1. (a) Montrer que le bénéfice est donné par la fonction B, définie sur $[0\ ;\ 20]$ par :

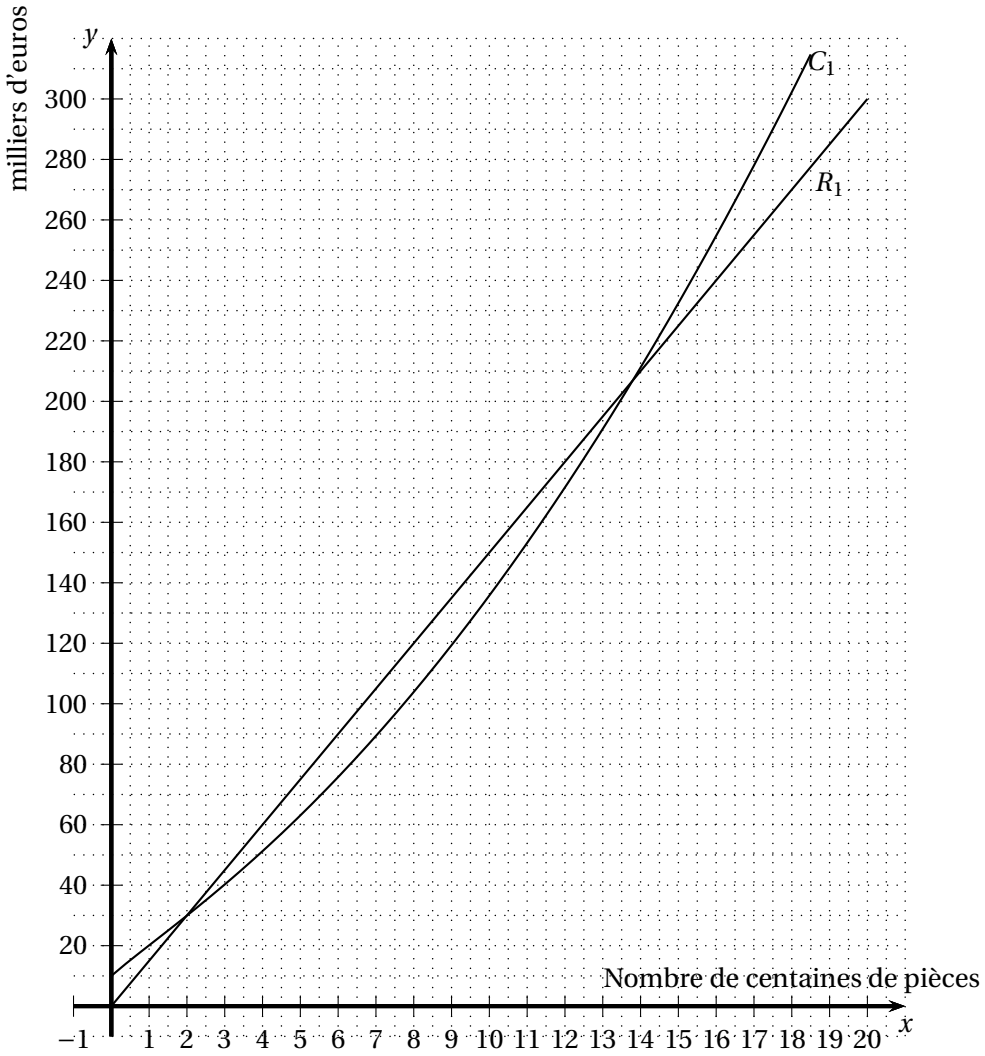
$$B(x) = -0,5x^2 + 8,5x - 10 - 4,5\ln(x+1).$$

On note B' la fonction dérivée de B sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$.

(b) Calculer $B'(x)$.

(c) Vérifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,20]$, $B'(x) = \dfrac{(x+0,5)(8-x)}{x+1}$.

2. (a) Justifier que le signe de $B'(x)$ est celui de $(8-x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$.

(b) En déduire le signe de $B'(x)$ puis le tableau de variation de B sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$.

3. Pour quelle fabrication hebdomadaire le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal à l'euro près ?