Correction du sujet A

I

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 7$ sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = 2 \times 3x^2 + 5 \times 2x + 3 = 6x^2 + 10x + 3$;
$\boxed{f'(x) = 6x^2 + 10x + 3}$

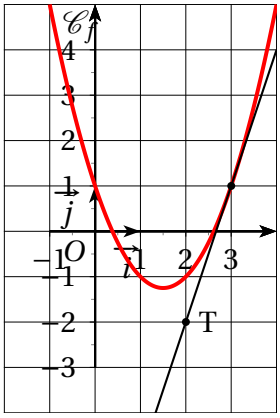
b) $f(x) = \dfrac{7}{x^4} = 7 \times \dfrac{1}{x^4}$ sur $]0\,;\,+\infty[$
$f'(x) = 7 \times \left(-\dfrac{4}{x^5}\right) = -\dfrac{28}{x^5}$ donc $\boxed{f'(x) = -\dfrac{28}{x^5}}$

c) $f(x) = 3x - \dfrac{5}{x} = 3x - 5 \times \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$
$f'(x) = 3 - 5 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 3 + \dfrac{5}{x^2}$; $\boxed{f'(x) = 3 + \dfrac{5}{x^2}}$

d) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-7}$ sur $\left]\dfrac{7}{3}\,;\,+\infty\right[$
$f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x+1 \\ v(x) = 3x-7 \end{cases}$
$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = 3 \end{cases}$.
$f'(x) = \dfrac{2(3x-7) - 3(2x+1)}{(3x-7)^2} = \dfrac{6x - 14 - 6x - 3}{(3x-7)^2}$
$= -\dfrac{17}{(3x-7)^2}$ donc $\boxed{f'(x) = -\dfrac{17}{(3x-7)^2}}$

e) $f(x) = \left(3x^2 + 5x - 1\right)^5$
$f = u^n$ avec $u(x) = 3x^2 + 5x - 1$ et $n = 5$.
$f' = nu'u^{n-1}$ avec $u'(x)6x + 5$
Donc : $\boxed{f'(x) = 5(6x+5)\left(3x^2 + 5x - 1\right)^4}$

II



La tangente passe par les points de coordonnées (2 ; -2) et (3 ; 1) donc le coefficient directeur de la tangente est $\dfrac{1-(-2)}{3-2} = \dfrac{3}{1} = 3$. Or, le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 3 est $f'(3)$, donc $\boxed{f'(3) = 3}$.

III

Une fonction f dérivable en 5 est telle que :

$$f(5) = -3 \text{ et } f'(5) = \frac{1}{2}.$$

L'équation réduite de la tangente est
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 5$, donc
$y = f'(5)(x-5) + f(5)$.
On en déduit $y = \dfrac{1}{2}(x-5)+(-3)$ donc $\boxed{y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{11}{2}}$.

IV

Soient les fonctions f et g définies sur $]-\infty\,;\,0[$ par :

$$f(x) = x^2 - x \text{ et } g(x) = \frac{3}{x} + 5.$$

1. Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -1.
   L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A est :
   $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$.
   $f[-1] = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$; $f'(x) = 2x - 1$
   donc $f'(-1) = -3$.
   L'équation de la tangente est alors :
   $y = -3(x+1) + 2$ donc $\boxed{y = -3x - 1}$.
2. $g(-1) = \dfrac{3}{-1} + 5 = -3 + 5 = 2 = y_A$ donc $A \in \mathscr{C}_g$.
3. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ en A est $y = g'(-1)(x+1) + g(-1)$ avec $g(-1) = 2$,
   $g'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$ donc $g'(-1) = -3$.
   L'équation de cette tangente est donc
   $y = -3(x+1) + 2$ donc $\boxed{y = -3x - 1}$.
4. Les deux tangentes ont la même équation, donc les deux courbes ont la même tangente en A ; elles sont tangentes en A.

V

1. $f(x) = x^2 + 5x - 4$ sur $[-5\,;\,5]$.
   $\boxed{f'(x) = 2x + 5}$; $f'(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{5}{2}$.
   On en déduit le tableau de variation :

x	-5		$-\frac{5}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↘	$-\frac{41}{4}$	↗	46

2. $f(x) = \dfrac{2x+3}{5x-4}$ sur $\left]\dfrac{4}{5}\,;\,10\right]$

$f'(x) = \dfrac{2(5x-4)-5(2x+3)}{((5x-4)^2)} = \boxed{-\dfrac{23}{(5x-4)^2}}$

$f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $\left]\dfrac{4}{5}\,;\,10\right]$.

x	$\frac{4}{5}$		10
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+3}$ sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,10\right]$

$f'(x) = \dfrac{2x(2x+3)-2x^2}{(2x+3)^2} = \dfrac{4x^2+6x-2x^2}{(2x+3)^2}$

$= \dfrac{2x^2+6x}{(2x+3)^2} = \boxed{\dfrac{2x(x+3)}{(2x+3)^2}}$

$2x = 0$ pour $x = 0$ et $x+3 = 0$ pour $x = -3$.

Tableau de variation :

x	$-\frac{3}{2}$		0		10
$2x$		$-$	0	$-$	
$x+3$		$+$		$+$	
$(2x+3)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{100}{23}$

4. $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+5x+9}$ sur $[-2\,;\,2]$

$f'(x) = \dfrac{-1\times\left(x^2+5x+9\right)+(2x+5)\times(-1)}{\left(x^2+5x+9\right)^2}$

$= \dfrac{x^2-9}{\left(x^2+5x+9\right)^2} = \boxed{\dfrac{(x+3)(x-3)}{\left(x^2+5x+9\right)^2}}$.

$x+3 = 0$ pour $x = -3$; $x-3 = 0$ pour $x = -3$.
-3 et 3 sont en dehors de l'intervalle [-2 ; 2].

x	-2		2
$x+3$		$+$	
$x-3$		$-$	
$\left(x^2+5x+9\right)^2$		$+$	
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\frac{2}{23}$