Correction du contrôle (sujet B)

I

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x - 5$ sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3\times 3x^2 + 4\times 2x + 5$ donc $\boxed{f'(x) = 9x^2 + 8x + 5}$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x^5} = 3 \times \dfrac{1}{x^5}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

$f'(x) = 3 \times \left(-\dfrac{5}{x^6}\right) = -\dfrac{15}{x^6}$; $\boxed{f'(x) = -\dfrac{15}{x^6}}$.

c) $f(x) = 2x - \dfrac{7}{x} = 2x - 7 \times \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

$f'(x) = 2 - 7 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \boxed{2 + \dfrac{7}{x^2}}$.

d) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-7}$ sur $\left]\dfrac{7}{3}\,;\,+\infty\right[$

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x+1 \\ v(x) = 2x-7 \end{cases}$.

$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$

Alors $f'(x) = \dfrac{3(2x-7) - 2(3x+1)}{(2x-7)^2} = \dfrac{6x - 21 - 6x - 2}{(2x-7)^2}$

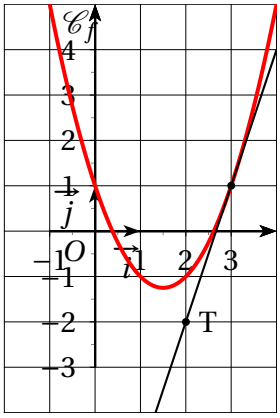
$= \boxed{-\dfrac{23}{(2x-7)^2}}$

e) $f(x) = \left(5x^2 + 4x - 1\right)^5$

$f'(x) = u^n$ avec $u(x) = 5x^2 + 4x - 1$ et $n = 5$.

$f' = nu'u^{n-1}$ avec $u'(x) = 10x + 4$ donc $\boxed{f'(x) = 5(10x+4)\left(5x^2 + 4x - 1\right)^4}$

II



La tangente passe par les points de coordonnées (2 ; -2) et (3 ; 1) donc le coefficient directeur de la tangente est $\dfrac{1-(-2)}{3-2} = \dfrac{3}{1} = 3$. Or, le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 3 est $f'(3)$, donc $\boxed{f'(3) = 3}$.

III

Une fonction f dérivable en 3 est telle que :

$$f(3) = -2 \text{ et } f'(3) = \frac{1}{3}.$$

L'équation réduite de la tangente est
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 3$ donc
$y = f'(3)(x-3) + f(3)$.
Donc $y = \dfrac{1}{3}(x-3) + (-2)$ donc $y = \dfrac{1}{3}(x-3) - 2$ d'où

$\boxed{y = -\dfrac{1}{3}x - 3}$

IV

Soient les fonctions f et g définies sur $]-\infty\,;\,0[$ par :

$$f(x) = x^2 - x \text{ et } g(x) = \frac{3}{x} + 5.$$

1. Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -1.
   L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A est :
   $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$.
   $f[-1] = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$; $f'(x) = 2x - 1$ donc $f'(-1) = -3$.
   L'équation de la tangente est alors :
   $y = -3(x+1) + 2$ donc $\boxed{y = -3x - 1}$.
2. $g(-1) = \dfrac{3}{-1} + 5 = -3 + 5 = 2 = y_A$ donc $A \in \mathscr{C}_g$.
3. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ en A est $y = g'(-1)(x+1) + g(-1)$ avec $g(-1) = 2$, $g'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$ donc $g'(-1) = -3$.
   L'équation de cette tangente est donc $y = -3(x+1) + 2$ donc $\boxed{y = -3x - 1}$.
4. Les deux tangentes ont la même équation, donc les deux courbes ont la même tangente en A ; elles sont tangentes en A.

V

Pour chacune des fonctions, calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire les variations de f sur l'intervalle considéré.

1. $f(x) = x^2 + 3x - 4$ sur $[-5\,;\,5]$
   $\boxed{f'(x) = 2x + 3}$
   $2x + 3 = 0$ pour $x = -\dfrac{3}{2}$.
   On en déduit la tableau de variation :

x	-5		$-\frac{3}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	↘	$-\frac{25}{4}$	↗	36

2. $f(x)=\dfrac{3x+2}{5x-4}$ sur $\left]\dfrac{4}{5}\,;\,10\right]$

$f'(x)=\dfrac{3(5x-4)-5(3x+2)}{(5x-4)^2}=\dfrac{15x-12-15x-10}{(5x-4)^2}$

$=\boxed{-\dfrac{22}{(5x-4)^2}}$.

$f'(x)<0$.

f est donc décroissante sur $\left]\dfrac{4}{5}\,;\,10\right]$.

Tableau de variation :

x	$\frac{4}{5}$		10
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		↘	$\frac{17}{21}$

3. $f(x)=\dfrac{x^2}{3x+2}$ sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,10\right]$

$f'(x)=\dfrac{2x(3x+2)-3x^2}{(3x+2)^2}=\dfrac{6x^2+4x-3x^2}{(3x+2)^2}$

$=\dfrac{3x^2+4x}{[3x+2]^2}=\boxed{\dfrac{x(3x+4)}{(3x+2)^2}}$

$3x+4=0$ pour $x=-\dfrac{4}{3}$ qui n'est pas dans l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}\,;\,10\right]$.

Tableau de variation

x	$-\frac{2}{3}$		0		10
x		$-$	0	$+$	
$3x+2$		$+$		$+$	
$(3x+2)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	$\frac{25}{8}$

4. $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+5x+16}$ sur $[-2\,;\,2]$

On obtient $f'(x)=\dfrac{-\left(x^2+5x+16\right)-(2x+5)\times(-x)}{\left(x^2+5x+16\right)^2}$

$=\dfrac{-x^2-5x-16+2x^2+5x}{\left(x^2+5x+16\right)^2}$

$=\dfrac{x^2-16}{\left(x^2+5x+16\right)^2}=\boxed{\dfrac{(x+4)(x-4)}{\left(x^2+5x+16\right)^2}}$.

$x+4$ s'annule en -4 qui est hors de $[-2\,;\,2]$.

$x-4$ s'annule en 4 qui est hors de $[-2\,;\,2]$.

Tableau de variations :

x	-2		2
$x+4$		$-$	
$x-4$		$-$	
$\left(x^2+5x+16\right)^2$		$+$	
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	↘	$-\frac{1}{15}$