Correction des exercices du stage de révision

Table des matières

I Pondichéry avril 2014 . . . 1
II Liban mai 2014 . . . 2
III Métropole juin 2014 . . . 2
IV Antilles-Guyane septembre 2014 . . . 3
V Polynésie septembre 2010 . . . 4
VI Réunion juin 2006 . . . 5

I Pondichéry avril 2014

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. $\left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

   Or $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

   Donc le nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ a pour module $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{6}$ donc sa forme exponentielle est $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

2. (a) $r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n\right| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$

   Donc la suite (r_n) est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = |z_0| = 1$.

   (b) La suite (r_n) est géométrique donc, pour tout n, $r_n = r_0 \times q^n$, donc $r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

   (c) $OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

   (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$; or $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc la suite (r_n) converge vers 0. La longueur OA_n tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. (a) On fait tourner l'algorithme donné dans le texte en prenant pour P la valeur $0,5$:

	n	R	P	$R > P$
Initialisations	0	1	0,5	Vrai
Traitement	1	0,866	0,5	Vrai
	2	0,75	0,5	Vrai
	3	0,6495	0,5	Vrai
	4	0,5625	0,5	Vrai
	5	0,487	0,5	Faux
Sortie	Afficher 5			

   La valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$ est 5.

   (b) Cet algorithme s'arrête dès que $R \leqslant P$ et affiche alors n, c'est-à-dire qu'il affiche la plus petite valeur de n pour laquelle R donc $r_n = OA_n$ est inférieur ou égal à P.

   On peut donc dire que $OA_{32} > 0,01$ et que $OA_{33} \leqslant 0,01$.

   Vérification à la calculatrice : $r_{32} \approx 0,01002$ et $r_{33} \approx 0,00868$.

4. (a) On considère le triangle OA_nA_{n+1}.

   $OA_n = r_n$ donc $(OA_n)^2 = r_n^2$

   $OA_{n+1} = r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$ donc $(OA_{n+1})^2 = \frac{3}{4} r_n^2$

   $A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} - 1\right) z_n\right| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| \times |z_n|$

   $= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \times r_n = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} r_n = \sqrt{\frac{4}{16}} r_n = \frac{1}{2} r_n$ donc $(A_nA_{n+1})^2 = \frac{1}{4} r_n^2$

   $(A_nA_{n+1})^2 + (OA_{n+1})^2 = \frac{1}{4} r_n^2 + \frac{3}{4} r_n^2 = r_n^2 = (OA_n)^2$

   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

   (b) On admet que $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

   Le point A_n, d'affixe z_n, appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son argument est $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$

modulo 2π, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ modulo π, donc il peut s'écrire $\frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

Le nombre z_n a pour argument $\frac{n\pi}{6}$; $\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi \iff n=3+6k$.

Mais n est un entier naturel donc k doit être strictement positif donc appartenir à $\mathbb{N}$.

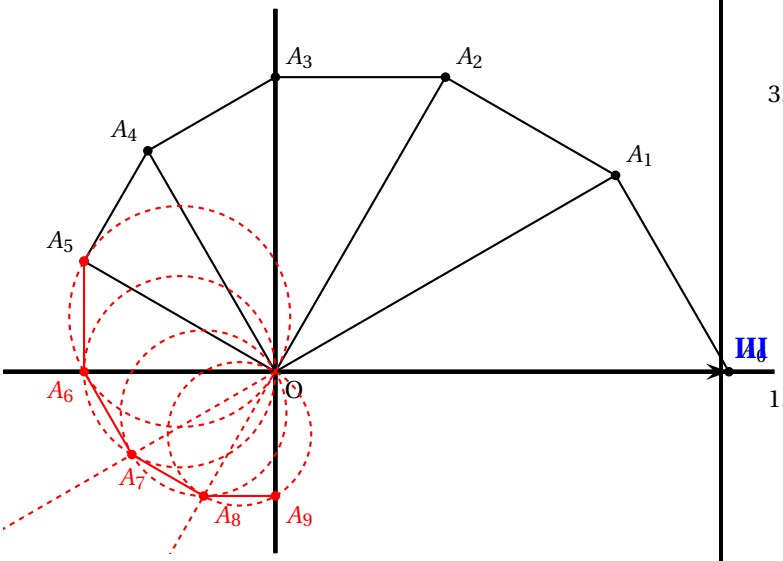
Donc si n s'écrit $3+6k$ avec $k\in\mathbb{N}$, alors le point A_n appartient à l'axe des ordonnées.

(c) Le point A_6 a pour affixe z_6 qui a pour argument $\frac{6\pi}{6}=\pi$; ce point est donc sur l'axe des abscisses. Comme le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_6, on trace le cercle de diamètre $[OA_5]$; le point A_6 est à l'intersection de ce cercle et de l'axe des abscisses.

Le point A_7 a pour affixe z_7 qui a pour argument $\frac{7\pi}{6}$; donc les points A_1, O et A_7 sont alignés. Le point A_7 se trouve donc à l'intersection du cercle de diamètre $[OA_6]$ et de la droite (OA_1).

Etc. (Voir figure en annexe)

Remarque : les points A_3 et A_9 appartiennent à l'axe des ordonnées, ce qui correspond bien à la réponse trouvée à la question **4.b.**



II Liban mai 2014

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1}=(1+\mathrm{i})z_n$$

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=|z_n|$.

1. $u_0=|z_0|=\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|=2$.
2. $u_{n+1}=|z_{n+1}|=|(1+\mathrm{i})z_n|=|1+\mathrm{i}|\times|z_n|=\sqrt{2}|z_n|=\sqrt{2}u_n$
3. D'après le cours, pour tout entier naturel n, on a $u_n=2\left(\sqrt{2}\right)^n$; (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0=2$.
4. (u_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}>1$ et de premier terme strictement positif, elle diverge donc vers $+\infty$.
5.

Variables	:	u est un réel
		p est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	Tant que $u\leqslant p$ Faire
		Affecter à n la valeur $n+1$
		Affecter à u la valeur $\sqrt{2}\times u$
		Fin du Tant Que
Sortie	:	Afficher n

Partie B

1. $z_1=(1+\mathrm{i})\times(\sqrt{3}-\mathrm{i})=1+\sqrt{3}+\mathrm{i}(\sqrt{3}-1)$.
2. $z_0=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$

   $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

   $z_1=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}\times\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}$.
3. Des deux questions précédentes, on obtient que

   $$1+\sqrt{3}+\mathrm{i}(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

   D'où
   $$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

III Métropole juin 2014

1. Nous avons une équation de degré 2, à coefficients réels. On va donc calculer le discriminant Δ du trinôme du second degré.
   $\Delta=4^2-4\times1\times16=16-4\times16=-3\times16=-48$.
   Le discriminant étant strictement négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées, qui sont : $Z_1=\frac{-4-\imath\sqrt{48}}{2}=\frac{-4-4\imath\sqrt{3}}{2}=-2-2\imath\sqrt{3}$ et $Z_2=\overline{Z_1}=-2+2\imath\sqrt{3}$.
   Présentons maintenant ces nombres sous leur forme exponentielle, en commençant par calculer le module de Z_1 :
   $|Z_1|=\sqrt{(-2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=4$.
   On peut donc écrire : $Z_1=4\times\left(\frac{-2}{4}+\imath\frac{-2\sqrt{3}}{4}\right)=4\times\left(\frac{-1}{2}+\imath\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$.
   Un argument de Z_1 sera donc un angle dont le cosinus est $\frac{-1}{2}$ et le sinus est $\frac{-\sqrt{3}}{2}$, donc $\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ dont la mesure

principale est $\dfrac{-2\pi}{3}$.

La forme exponentielle de Z_1 est donc : $Z_1 = 4\mathrm{e}^{\frac{-2\imath\pi}{3}}$, et puisque Z_2 est le conjugué de Z_1, d'après les propriétés des modules et arguments : $Z_2 = 4\mathrm{r}^{\frac{2\imath\pi}{3}}$. L'équation admet donc deux solutions, qui sous leurs formes exponentielles sont : $Z_1 = 4\mathrm{e}^{\frac{-2\imath\pi}{3}}$ et $Z_2 = 4\mathrm{e}^{\frac{2\imath\pi}{3}}$.

2. Si a a pour module 2 et pour argument $\dfrac{\pi}{3}$, alors $a = 2\mathrm{e}^{\frac{\imath\pi}{3}}$ et donc, d'après les propriété du module et des arguments, $a^2 = 2^2\mathrm{e}^{2\times\frac{\imath\pi}{3}}$, donc on a $a^2 = Z_2$ et donc la forme algébrique de a^2 est $-2+2\imath\sqrt{3}$.
Le nombre a est donc une solution à l'équation dont on parle dans cette question. L'autre solution sera donc $-a$, car $(-a)^2 = a^2$, donc si a est une solution, $-a$ en sera une aussi. On va donc présenter les deux solutions sous forme algébrique, comme demandé :
$a = 2\mathrm{e}^{\frac{\imath\pi}{3}} = 2\times\left(\dfrac{1}{2}+\imath\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+\imath\sqrt{3}$ et $-a = -1+\imath\times\left(-\sqrt{3}\right)$.

3. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Il existe donc quatre nombres réels x_1 ; y_1 ; x_2 et y_2 tels que $z_1 = x_1+\imath y_1$ et $z_2 = x_2+\imath y_2$.
On a alors $z_1z_2 = (x_1+\imath y_1)(x_2+\imath y_2)$
$= x_1x_2+\imath x_1y_2+\imath y_1x_2+\imath^2y_1y_2$
$= (x_1x_2-y_1y_2)+\imath(x_1y_2+x_2y_1)$
Comme les nombres x_1, x_2, y_1 et y_2 sont réels, alors on peut définir les nombres $x_3 = x_1x_2-y_1y_2$ et $y_3 = x_1y_2+x_2y_1$, qui sont réels également.
On a donc écrit le produit z_1z_2 sous la forme $x_3+\imath y_3$, où x_3 et y_3 sont des nombres réels, donc le conjugué de z_1z_2 est :
$\overline{z_1z_2} = x_3-\imath y_3 = (x_1x_2-y_1y_2)-\imath(x_1y_2+x_2y_1)$.
Par ailleurs, calculons le produit : $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1-\imath y_1)\times(x_2-\imath y_2)$
$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = x_1x_2-\imath x_1y_2-\imath y_2x_1+(-\imath)^2y_1y_2 = (x_1x_2-y_1y_2)-\imath(x_1y_2+x_2y_1) = \overline{z_1z_2}$
Nous avons donc démontré que pour deux nombres complexes quelconques z_1 et z_2, on a : $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1z_2}$.
La seconde propriété sera démontrée par récurrence. Posons, pour tout entier naturel n non nul la propriété $\mathscr{P}_n$, qui dit que pour tout complexe z, on a $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.
Initialisation : Pour $n = 1$, on a $z^1 = z$, donc $\overline{z^1} = \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^1$: *la propriété $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.*
Hérédité : Pour un entier k naturel non nul, on suppose vraie la propriété $\mathscr{P}_k$, c'est à dire que l'on suppose que pour tout complexe z, on a $\overline{z^k} = \left(\overline{z}\right)^k$.
On souhaite maintenant démontrer que si cette propriété est vraie, alors la propriété suivante doit être vraie aussi.
Soit z un nombre complexe. On s'intéresse donc à $\overline{z^{k+1}}$.
On a $z^{k+1} = z^k\times z$, donc :

$\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k\times z}$	
$= \overline{z^k}\times\overline{z}$	application de la propriété précédente.
$= \left(\overline{z}\right)^k\times\overline{z}$	par hypothèse de récurrence.
$= \left(\overline{z}\right)^{k+1}$	ce qui constitue la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$.

Nous avons donc démontré que si la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie, cela implique que $\mathscr{P}_{k+1}$ l'est également : *la propriété est héréditaire.*
Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire, donc, on peut donc dire que pour tout entier n naturel non nul, et pour tout nombre complexe z, on a $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

4. Soit z une solution de l'équation (E), cela signifie que l'on a : $z^4+4z^2+16 = 0$. Vérifions maintenant si le conjugué de z est une solution de l'équation :

$\overline{z}^4+4\overline{z}^2+16 = \overline{z^4}+4\overline{z^2}+16$	dernière propriété démontrée.
$= \overline{z^4}+\overline{4z^2}+16$	première propriété démontrée sachant que $4 = \overline{4}$, car 4 est réel.
$= \overline{z^4+4z^2+16}$	somme des conjugués.
$= \overline{0}$	car z est solution de (E).
$= 0$	car 0 est réel, donc est son propre con

On a établi à la question **2.** que les nombres a et $-a$ sont tels que $a^2 = Z_2$ et $(-a)^2 = Z_2$.
Comme par ailleurs on a dit que Z_2 est solution de l'équation $Z^2+4Z+16 = 0$, cela signifie que $\left(a^2\right)^2+4\left(a^2\right)+16 = 0$, donc que $a^4+4a^2+16 = 0$, donc a est solution de (E) et de la même façon, $-a$ est aussi une solution de cette équation.
En appliquant la propriété démontrée au début de cette question, on en déduit que les nombres $\overline{a}$ et $\overline{-a}$ sont également des solutions à cette équation. Nous avons donc 4 solutions à l'équation, qui sont distinctes : $a = 1+\imath\sqrt{3}$; $-a = -1-\imath\sqrt{3}$; $\overline{a} = 1-\imath\sqrt{3}$ et $\overline{-a} = -1+\imath\sqrt{3}$, donc puisqu'il y a au maximum 4 solutions à l'équation, celle ce ne peut avoir d'autre solution que celles trouvées, et donc l'équation (E) a été résolue.

IV Antilles-Guyane septembre 2014

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1. D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ ce qui équivaut à $\lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = 0$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$ et :
$f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{-x}+x\left(-1\times\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$;
$f(0) = 0$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$
D'o

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	0

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On place sur le graphique, en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n > 0$.

   - $u_0 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_p > 0$.

     Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc pour tout réel $x > 0$, $x\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f(x) > 0$.

     Or $u_{p+1} = f(u_p)$ et $u_p > 0$ (hypothèse de récurrence) ; donc $f(u_p) > 0$ et donc $u_{p+1} > 0$.

     La propriété est vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vérifiée au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $p \geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

3. Pour tout réel $x > 0$:

   $$\begin{aligned} -x < 0 &\iff \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^0 && \text{croissance de la fonction exponentielle} \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} < 1 \\ &\iff x\mathrm{e}^{-x} < x && \text{car } x > 0 \\ &\iff f(x) < x \end{aligned}$$

   Donc, pour tout $x > 0$, $f(x) < x$; or, pour tout n, $u_n > 0$ donc $f(u_n) < u_n$ ce qui veut dire que $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

4. (a) La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

   (b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\mathrm{e}^{-x} = x$.

   On résout l'équation $x\mathrm{e}^{-x} = x$:

   $$\begin{aligned} x\mathrm{e}^{-x} = x &\iff x\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} = 1 \iff x = 0 \text{ ou } -x = 0 \end{aligned}$$

   Donc la limite de la suite (u_n) est égale à 0.

Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

L'algorithme suivant donne S_{100} :

Déclaration des variables :	S et u sont des nombres réels
	k est un nombre entier
Initialisation :	u prend la valeur 1
	S prend la valeur u
Traitement :	Pour k variant de 1 à 100
	u prend la valeur $u \times \mathrm{e}^{-u}$
	S prend la valeur $S + u$
	Fin Pour
	Afficher S

V Polynésie septembre 2010

Partie 1

1. On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1-x) + 1$.

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$, donc par produit des limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

2. La fonction g, somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$, est dérivable et sur $[0\,;\,+\infty[$:

   $g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$.

   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ et $x > 0$, on a $g'(x) < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

   g est donc décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de $g(0) = 2$ à $-\infty$.

3. Donner le tableau de variations de g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

4. (a) Sur $[0\,;\,+\infty[$, g dérivable est donc continue, $g(0) > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un réel $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme g est décroissante, cette solution est unique.

   (b) La calculatrice donne :

   - $g(1) = 1$ et $g(2) \approx -6{,}4$, donc $1 < \alpha < 2$;
   - $g(1{,}2) \approx 0{,}3$ et $g(1{,}3) \approx -0{,}1$, donc $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$;
   - $g(1{,}27) \approx 0{,}04$ et $g(1{,}28) \approx -0{,}007$, donc $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

   (c) On a $g(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

5. On a donc :

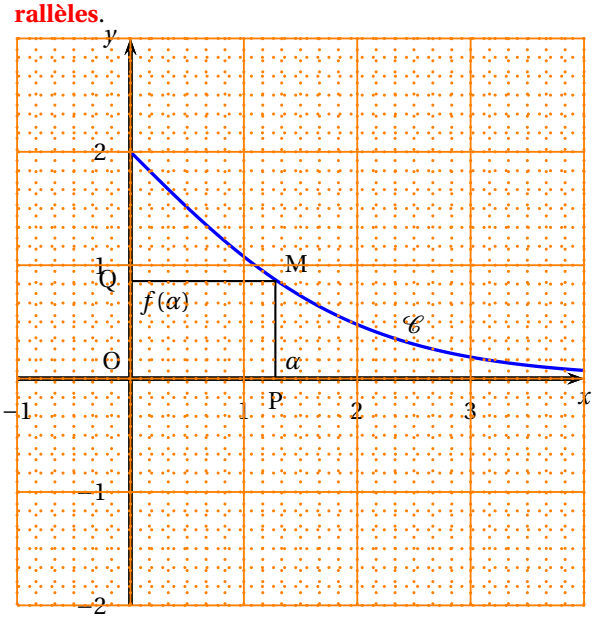
x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

Partie 2

1. La fonction A quotient de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ (le dénominateur ne s'annulant pas) est dérivable et sur cet intervalle :
$A'(x) = \dfrac{4\left(\mathrm{e}^x+1\right)-4x\times\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{4\left(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x+1\right)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \boxed{\dfrac{4g(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}}$.
Comme $\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2>0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.
D'après la précédente question on a donc :
$A'(x)>0$ sur $[0\,;\,\alpha[$;
$A'(\alpha)=0$;
$A'<0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.
2. On a donc :
A est croissante sur $[0\,;\,\alpha[$ et décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de la fonction.

Partie 3

1. On sait que $x\geqslant 0$, donc l'aire du rectangle $OPMQ$ est égale à $x\times f(x)=\dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1}=A(x)$.
Or on a vu que la fonction présente un maximum pour $x=\alpha$.
2. Le coefficient directeur de la droite (PQ) est égal à $-\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=-\dfrac{\frac{4}{\mathrm{e}^\alpha+1}}{\alpha}=-\dfrac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^\alpha+1\right)}$.
Or on a vu que $\mathrm{e}^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$, donc le coefficient directeur est égal à :
$-\dfrac{4}{\alpha\left(\mathrm{e}^\alpha+1\right)}=-\dfrac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)}=-\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha(1+\alpha-1)}=-\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.
La tangente en $M(\alpha\,;\,f(\alpha))$ a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.
Or $f'(x)=-\dfrac{4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$, donc
$f'(\alpha)=-\dfrac{4\mathrm{e}^\alpha}{(\mathrm{e}^\alpha+1)^2}=-\dfrac{\frac{4}{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{\alpha-1}+1\right)^2}=-\dfrac{4(\alpha-1)}{(1+\alpha-1)^2}=-\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$.
Les coefficients directeurs sont égaux : les droites sont **parallèles**.



VI Réunion juin 2006

Partie A

$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

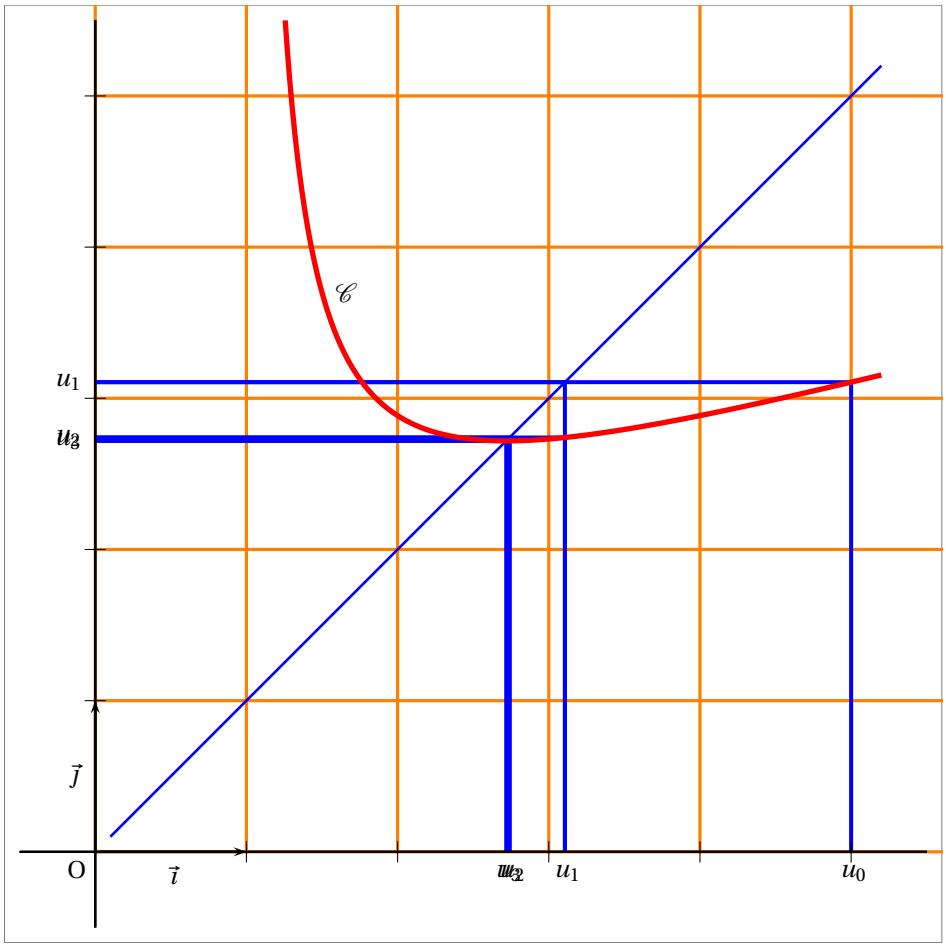
1. (a) Comme $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0_+$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$.
(b) f quotient de fonctions dérivables, celle du dénominateur ne s'annulant pas, est dérivable et $f'(x)=\dfrac{\ln x-x\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$ qui est du signe de $\ln x-1$.
Des propriétés de la fonction ln, on en déduit que $\ln\mathrm{e}=1$ et comme cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit le signe de la dérivée et le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

2. (a) voir à la fin
La suite semble converger « rapidement ».
(b) On a $u_0=5\geqslant\mathrm{e}$. Pour $n>0$, u_n est une image par f d'un réel. D'après le tableau de variations ci-dessus, $f(x)\geqslant\mathrm{e}\Longrightarrow u_n\geqslant\mathrm{e}$.
(c) On calcule $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{\ln u_n}-u_n=\dfrac{u_n(1-\ln u_n}{\ln u_n}$.
On vient de voir que $u_n\geqslant\mathrm{e}>1\Longrightarrow\ln u_n>0$. La différence est donc du signe de $1-\ln u_n$ qui est négative d'après la question 1. b.
$u_{n+1}-u_n<0\iff(u_n)$ est une suite décroissante.
C'est une suite décroissante et minorée par e : elle converge vers une limite $\ell\geqslant\mathrm{e}$.

Partie B

1. Or l'égalité $u_{n+1}=f(u_n)$ donne à la limite $\ell=f(\ell)$.
2. $\ell=f(\ell)\iff\ell=\dfrac{\ell}{\ln\ell}\iff$ (car $\ell\neq 0$), $1=\dfrac{1}{\ln\ell}\iff\ln\ell=1\iff\ell=\mathrm{e}$.
La suite converge vers e.


$\mathscr{C}$
u_1
u_2
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
u_2
u_1
u_0