Probabilités

Table des matières

I Vocabulaire des événements

1 Rappels :

Définition

Dans une expérience aléatoire, on appelle **univers** l'ensemble de toutes les issues possibles. On note souvent cet ensemble Ω

.

Exemples :

- on lance un dé cubique et on regarde la face supérieure : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
- On suppose que le sexe d'un bébé à la naissance est d au hasard. On s'intéresse aux familles de deux enfants et on regarde les sexes des enfants.
  On note G et F les deux sexes.
  Alors : $\Omega = \{GG ; GF ; FG ; FF\}$

Définition

- On appelle **événement** toute partie de l'univers.
- Si cette partie n'a qu'un élément on parle d'**événement élémentaire**.
- On appelle **événement contraire** de A la partie de Ω composée de toutes les issues qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$.
- On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

2 Probabilités

La probabilité d'un événement A mesure les « chances » qu'a l'événement A de se réaliser effectivement. On la note $p(A)$. C'est un nombre compris entre 0 et 1.

Définition

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires de A.

On a toujours $p(\Omega) = 1$ et $p(\varnothing) = 0$.

Il y a équiprobabilité quand tous les événements élémentaires ont la même probabiité (exemple : $\frac{1}{6}$ pour chaque face d'un dé non truqué).

S'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement est égale à $\dfrac{\text{Nombre de cas favorables à cet événement}}{\text{Nombre total de cas possibles}}$

Propriété

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Si deux événements A et B sont incompatibles alors $p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Enfin dans le cas général (c'est-à-dire pas forcément disjointe) d'une union de deux événements on a :

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}.$$

II Probabilité conditionnelle ; indépendance

1 Probabilité conditionnelle

Définition

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant que l'événement A est réalisé (on dit probabilité de B sachant A) le nombre : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

On change d'ensemble de référence : au lieu de prendre comme référence l'univers entier, on se restreint à A.

Propriété

On en déduit l'écriture : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$.

Exemple : Une urne opaque contient 3 boules rouges et 2 boules vertes indiscernables au toucher.
On tire deux boules successivement sans remise.
on appelle R_1 l'événement « Tirer en premier une boule rouge » et R_2 l'événement « Tirer en deuxième une boule rouge ».
On a : $p(R_1) = \dfrac{3}{5}$; $p_{R_1}(R_2) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $p(R_1 \cap R_2) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$.
On a bien : $\dfrac{p(R_1 \cap R_2)}{p(R_1)} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{2}$.

2 Indépendance

Définition

On dit que deux événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Remarque : Dans le cas o˘ $p(A) \neq 0$, on peut réécrire cette définition : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{p(A) \times p(B)}{p(A)} = p(B)$ donc $p_A(B) = p(B)$. (Le fait que A soit réalisé n'influe pas sur la réalisation de$B$)

Il y a deux faÁons d'avoir des événements indépendants :

- soit le « bon sens » vous suggère que les événements le sont (deux lancers successifs d'une même pièce de monnaie),
- soit l'énoncé vous le dit d'une manière ou d'une autre.

Les cas d'indépendance sont dans la pratique très courants. Dès qu'on répète plusieurs fois une même expérience aléatoire, par exemple, les résultats de ces expériences sont indépendants les uns des autres.

Exemple : Reprenons notre exemple du tirage mais en supposant qu'une fois la première boule tirée, on la remette dans l'urne avant de tirer la seconde.
On a alors : $p(R_1 \cap R_2) = \left(p(R)\right)^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$.

III Exemple : exercice bac Réunion juin 2008

Une entreprise comprend 375 salariés. Elle dispose d'un restaurant d'entreprise.
Une enquête a été réalisée sur la fréquentation de ce restaurant par les salariés de cette entreprise.
Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Hommes	Femmes	Total
Nombre de salariés qui mangent régulièrement au restaurant d'entreprise	110	55	165
Nombre de salariés qui mangent occasionnellement au restaurant d'entreprise	42	33	75
Nombre de salariés qui ne mangent jamais au restaurant d'entreprise	58	77	135
Nombre total de salariés	210	165	375

On choisit au hasard un salarié dans la liste des 375 salariés de cette entreprise. Tous les salariés ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les évènements suivants :
F : « Le salarié choisi est une femme » ;
R : « Le salarié choisi mange régulièrement au restaurant d'entreprise » ;
O : « Le salarié choisi mange occasionnellement au restaurant d'entreprise ».

1. Traduire par une phrase l'évènement F ∩ R, puis calculer sa probabilité (arrondir le résultat au millième).
2. Traduire par une phrase l'évènement R ∪ O, puis calculer sa probabilité.
3. Calculer la probabilité que, sachant qu'il mange occasionnellement au restaurant d'entreprise, le salarié choisi soit une femme (donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

4. Les évènements F et O sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.

Réponses :

1. $F \cap R$ est l'événement : « La personne choisie est une femme qui manfé régulièrement au restaurant ».
$p(F \cap R) = \dfrac{55}{375} = \boxed{\dfrac{11}{75} \approx 0,147}$
2. $R \cup O$ est l'événement : « manger régulièrement ou occasionnellement au restaurant ».
$p(R \cup O) = \dfrac{165+75}{375} = \boxed{\dfrac{16}{25} = 0,64}$
3. $p_O(F) = \dfrac{33}{375} = \boxed{\dfrac{11}{125}}$ (directement) ou $p_O(F) = \dfrac{p(F \cap O)}{p(O)} = \dfrac{\frac{33}{375}}{\frac{75}{375}} = \dfrac{33}{375} = \dfrac{11}{125}$.
4. On applique la définition :
$p(F \cap O) = \dfrac{11}{125}$.
$p(F) \times p(O) = \dfrac{165}{375} \times \dfrac{75}{375} = \dfrac{11}{25} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{11}{125}$.
$p(F \cap O) = p(F) \times p(O)$ donc $\boxed{\text{les événements } F \text{ et } O \text{ sont indépendants}}$.