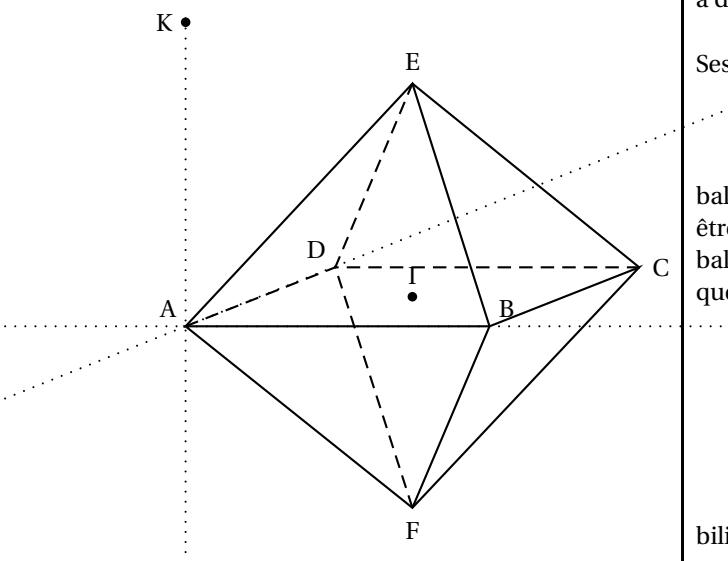
Sujet Liban mai 2016

Exercice I — 4 points

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre J. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AK}\right)$.

1. (a) Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

   (b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

   (a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

   (b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

   (c) Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide ADECBF par le plan (EMN).

Exercice II — 4 points

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.

Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} *près.*

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite.

Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

Exercice III — 4 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}.$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}}$ (on rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$).
3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0\,;\,1]$ par :

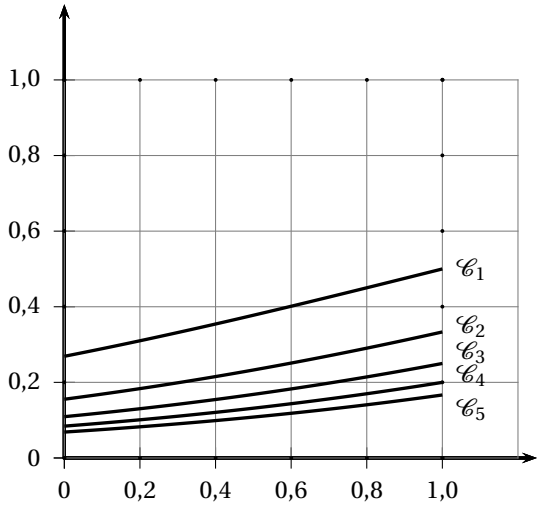
$$fn(x) = \frac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 f_n\,\mathrm{d}x.$$

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0.

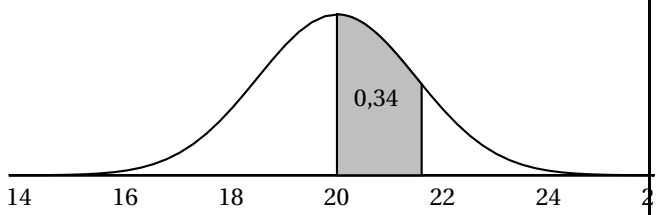


2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

Exercice IV — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

- Sur le schéma ci-dessous on a représenté la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$. La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 20 et 21,6 est égale à 0,34.



Affirmation 1 : La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23,2\ ;\ +\infty[$ vaut environ 0,046.

- Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose :

$$Z = \frac{\mathrm{i}z}{z-2}.$$

Affirmation 2 : L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point A(1 ; 0).
Affirmation 3 : Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4+6\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Affirmation 4 : L'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Affirmation 5 : L' algorithme suivant affiche en sortie la valeur 0,54.

Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0 Y prend la valeur $\frac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $Y < 0,5$ X prend la valeur $X + 0,01$ Y prend la valeur $\frac{3}{4+6\mathrm{e}^{-2X}}$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

Exercice V — 3 points

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \frac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_\mathrm{A} = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_\mathrm{A}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4-2\mathrm{i}).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.