BACCALAURÉAT BLANC

mars 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte à compléter pages, numérotées de 1 à 6
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

I (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A.

Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α.

1. **a.** Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

   b. Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

2. Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

   a. Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   b. Justifier que le point E a pour affixe $z_{\mathrm{E}} = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

3. Soient F et G les milieux respectifs des segments [BD] et [CE].

   a. Justifier que le point F a pour affixe $z_{\mathrm{F}} = \frac{\alpha}{2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   b. On admet que le point G a pour affixe $z_{\mathrm{G}} = \frac{\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.

   Démontrer que $\frac{z_{\mathrm{G}} - 2}{z_{\mathrm{F}} - 2} = \frac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question 1. a.

   En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.

   On admet que $\mathrm{AF}^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.

   On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi ; +\pi]$ par $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$.

   Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; +\pi]$. Compléter ce tableau de variations. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f		↘		↗		↘	

II (4 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 1$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

   a. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

   b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0 ; 1]$.

3.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & \frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

III (6 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0\,;\,+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note α cette solution.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction $\ln$ (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\,;\,2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par A$M = \sqrt{f(x)}$.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x}$.

a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

c. Montrer que AP $= \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

IV Exercice pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question, une seule réponse est exacte.
Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie.

Questions	Réponses
1. L'équation $e^{x^2-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ a pour solutions	**(a)** 1
	(b) $\dfrac{1}{2}$
	(c) -1
	(d) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
	(e) -1 et 1
2. L'inéquation $\ln(x) - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ a pour solution :	**(a)** $\mathcal{S} =]e\ ;\ +\infty[$
	(b) $\mathcal{S} =]0\ ;\ 1[$
	(c) $\mathcal{S} =]1\ ;\ e[$
	(d) $\mathcal{S} =]-e\ ;\ -1[\cup]1\ ;\ e[$
3. La fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 + 5x + \dfrac{25}{4})$ est définie sur :	**(a)** $\mathbb{R}$
	(b) $\mathbb{R}^+$
	(c) $]-\infty\ ;\ 5[\cup]5\ ;\ +\infty[$
	(d) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
	(e) $]5\ ;\ +\infty[$
4. Le signe de l'expression $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$ est	**(a)** toujours positif
	(b) toujours négatif
	(c) dépend du signe de x
	(d) dépend du signe de $x+1$
5. La fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{3-2x}{3+2x}\right)$ est :	**(a)** paire
	(b) impaire
	(c) ni l'un ni l'autre
6. La suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ $(n \geqslant 0)$ et $u_0 > 0$, avec $f(x) = x^2$, est :	**(a)** toujours croissante quelle que soit la valeur strictement positive de u_0
	(b) toujours décroissante quelle que soit la valeur strictement positive de u_0
	(c) croissante si et seulement si $u_0 > 1$
	(d) décroissante si et seulement si $u_0 > 1$

IV Exercice pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée (E) :

$$3x+7y=10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

a. Déterminer un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $3u+7v=1$.
En déduire une solution particulière $\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de (E).

2. On considère l'équation notée (G)

$$3x^2+7y^2=10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

a. Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).
Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).

b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.							

c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

ANNEXE de l'exercice II