Géométrie dans l'espace (deuxième partie)

Table des matières

I Rappels sur le produit scalaire dans le plan . . . 1
- I.1 Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires : . . . 1
- I.2 Produit scalaire de deux vecteurs quelconques : . . . 1
- I.3 Vecteurs orthogonaux . . . 2
- I.4 Vecteur directeur d'une droite . . . 3
- I.5 Vecteur normal à une droite . . . 3

II Produit scalaire dans l'espace . . . 4
- II.1 Produit scalaire . . . 4
- II.2 Différentes façons de calculer le produit scalaire . . . 4
- II.3 Vecteur normal à un plan, équation cartésienne d'un plan . . . 5
- II.4 Plans sécants . . . 5
- II.5 Droite . . . 5

III Représentation paramétrique d'un plan . . . 5

I Rappels sur le produit scalaire dans le plan

I.1 Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires :

Définition

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs colinéaires, alors le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est le nombre réel (scalaire) défini par :

- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de même sens, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OB$.
- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de sens opposés, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -OA \times OB$.

Remarque :
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = OA^2$

Si l'un des deux vecteurs est nul, leur produit scalaire est nul.

Définition

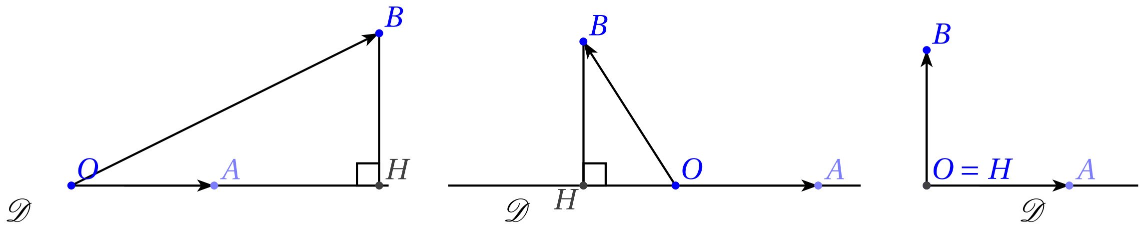
On définit le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$ par : $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = OA^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$.

Exemple :
On munit une droite $\mathscr{D}$ d'un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\right)$. On considère les points $A(4)$, $B(7)$, $C(8)$, $D(-3)$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$.

I.2 Produit scalaire de deux vecteurs quelconques :

Définition

Le projeté orthogonal d'un point B sur une droite $\mathscr{D}$ ($B \notin \mathscr{D}$), est le point H de $\mathscr{D}$ tel que les droites $\mathscr{D}$ et (BH) soient perpendiculaires.
Si $B \in \mathscr{D}$, son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$ est lui-même.



Définition

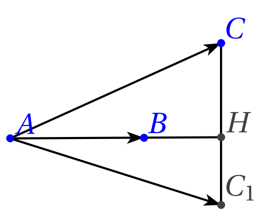
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on définit leur produit scalaire par : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).

I.3 Vecteurs orthogonaux

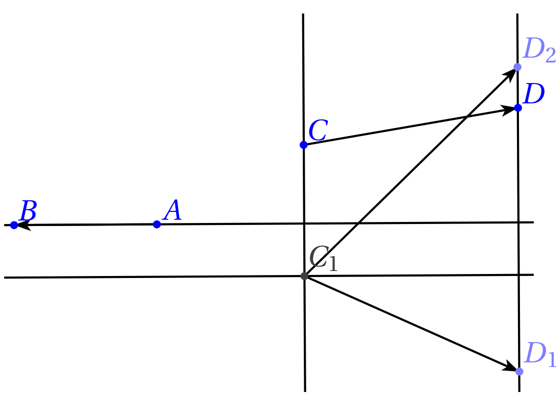
Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est nul.

Conséquences :



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C_2D_2}$.

Propriété

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \cos\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$.
- Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$, on a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

Démonstration :

- Cela vient de la définition initiale.
- $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$.

  On en déduit :
  $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}\right).\left(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}\right) = x\overrightarrow{i} \times x\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{i} \times y'\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{j} \times x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \times y'\overrightarrow{j} = xx' + yy'$ car $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} = ||\overrightarrow{i}||^2 = 1$, $\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j} = ||\overrightarrow{j}||^2 = 1$ et $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{i} = 0$

I.4 Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite .
Un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ si, et seulement si, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{D}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

Conséquence : soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non nul et soit $A\left(x_1\ ;\ y_A\right)$ un point.

$M(x\ ;\ y)$ appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_A \end{pmatrix}$.
On en déduit $a\left(y - y_A\right) - b\left(x - x_A\right) = 0$ (équation cartésienne de $\mathscr{D}$).

I.5 Vecteur normal à une droite

Définition

Soit $\mathscr{D}$ une droite .
Un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul est un vecteur normal à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{D}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

Équation cartésienne d'une droite $\mathscr{D}$

Soit $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ un point et soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

Une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est $a\left(x - x_A\right) + b\left(y - y_A\right) = 0$

Démonstration :
Soit $M(x\ ;\ y)$ un point quelconque. $M(x\ ;\ y)$ appartient à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_1\\y-y_A\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow a(x-x_A)+b\left(y-y_A\right)=0$ (c.q.f.d)

II Produit scalaire dans l'espace

II.1 Produit scalaire

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
A, B et C sont trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan $\mathscr{P}$ contenant ces trois points A, B et C (unique si les points ne sont pas alignés).
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathscr{P}$.

Remarque : il ne dépend pas du choix des points : en effet, dans $\mathscr{P}$, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$.
Si l'on choisit trois autres points A', B' et C' tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{A'C'}$, alors :
$\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}=\frac{1}{2}(A'B'^2+A'C'^2-B'C'^2)=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
Autrement dit : $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2+||\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)}$

II.2 Différentes façons de calculer le produit scalaire

Propriétés

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}||\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
2. Si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
3. Un repère orthonormal dans l'espace étant choisi, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$, alors :

   $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=aa'+bb'+cc'$.

Les propriétés du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace sont les mêmes que celles de deux vecteurs du plan. En particulier : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$.

II.3 Vecteur normal à un plan, équation cartésienne d'un plan

Définition

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à un plan $\mathscr{P}$ si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

Propriété

Soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par A et ayant $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal est : $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

Réciproquement : $ax+by+cz+d=0$ est une équation cartésienne d'un plan ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b; c)$.

Démonstration : $M(x; y; s) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$
il suffit de calculer le produit scalaire.

II.4 Plans sécants

Propriété

Pour montrer que deux plans sont sécants, donc non parallèles, il suffit de montrer que ces deux plans ont des vecteurs normaux non colinéaires.

II.5 Droite

Définition

Une droite est l'intersection de deux plans.
Les coordonnées d'un point d'une droite vérifient les équations de deux plans et vérifient donc un système de deux équations.
Une droite peut donc être représentée par un système de deux équations cartésiennes de plans

III Représentation paramétrique d'un plan

(plus au programme)

On suppose que l'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

Soit $\mathscr{P}$ un plan défini par un point $A\left(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A\right)$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ non colinéaires.

Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point quelconque du plan $\mathscr{P}$.
Il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$.
En terme de coordonnées :

$$\begin{cases} x - x_A = at + a't' \\ y - y_A = bt + b't' \\ z - z_A = ct + c't' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases} \quad \text{qu'on appelle représentation paramétrique du plan } \mathscr{P}.$$