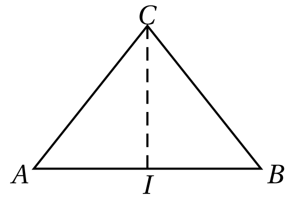
Correction des exercices de calculs de produits scalaires

I

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm.
I est le milieu de $[BC]$.



Calculer les produits scalaires :

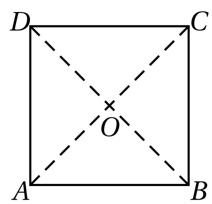
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = AB \times AI = 4\times 2 = \boxed{8}$

b) $AB\cdot\overrightarrow{AI} = AB \times 1I = \boxed{8}$

c) $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BI} = IA \times BI = 2\times 2 = \boxed{4}$ (vecteurs colinéaires de même sens)

II

$ABCD$ est un carré de côté 2 cm de centre O.



Calculer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \boxed{0}$(vecteurs orthogonaux)

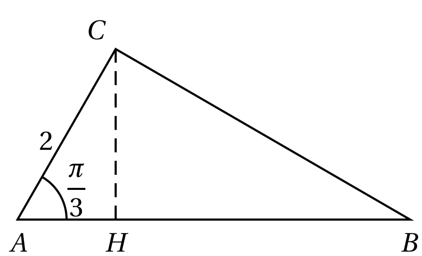
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 2^2 = \boxed{4}$
On peut aussi utiliser la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$
$= 2^2 = \boxed{4}$.

c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2 = BC^2 = 4$

d) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}\times\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC} = \dfrac{1}{2}DC^2 = \boxed{2}$.

III

Dans le triangle ABC ci-dessous, H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
On donne de plus $AC=2$, $AB=4$, et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$.



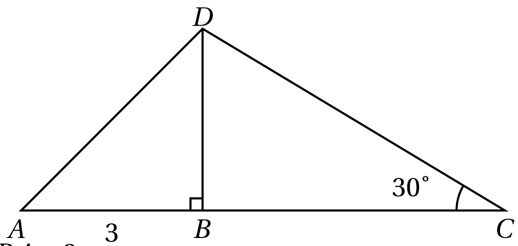
a) $AH = AC\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\times\frac{1}{2} = 1$: $\boxed{AH=1}$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 4\times 1 = 4$

c) Les deux produits scalaires sont égaux

IV

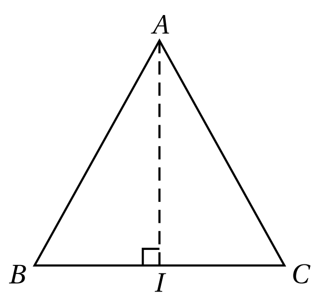
ABD est un triangle rectangle isocèle en B.
L'angle $\widehat{BCD}$ mesure 30° et $AB=3$.



1. • ABD est isocèle rectangle donc $BD = BA = 3$.
   D'après le théorème de Pythagore, on a $AD = 2 = 3^2+3^2 = 2\times 3^2$ donc $AD=\sqrt{3\times 2^2} = \boxed{3\sqrt{2}}$.
   • $CD = \dfrac{BD}{\sin\widehat{BCD}} = \dfrac{3}{\sin 30^\circ} = \dfrac{3}{\frac{1}{2}} = \boxed{6}$.
   • $\tan\widehat{BCD} = \dfrac{BD}{BC}$ donc $BC = \dfrac{BD}{\tan\widehat{BCD}} = \dfrac{3}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \boxed{3\sqrt{3}}$
2. Déterminer les produits scalaires suivants :
   (a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 = 3^2 = \boxed{9}$.
   (b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB} = CB^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 = \boxed{27}$
   (c) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = DA\times DC\times\cos\widehat{ADC} = 3\sqrt{2}\times 6\times\cos(45+60) = \boxed{18\sqrt{2}\cos(105^\circ)}$

V

ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que $AB = 2,5$ cm et $BC = 3$ cm.
I est le milieu de $[BC]$.



a) • $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BI} = BC\times BI = 3\times 1,5 = \boxed{4,5}$.
   • $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = BC\times BA\times\cos\widehat{ABC} = 3\times 2,5\times\cos\widehat{ABC} = \boxed{7,5\cos\widehat{ABC}}$

b) On en déduit : $7,5\cos\widehat{ABC} = 4,5$ donc $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{4,5}{7,5} = \dfrac{45}{75} = \boxed{\dfrac{3}{5}}$ d'où $\widehat{ABC}\approx\boxed{53,13^\circ}$