Équations différentielles

Table des matières

Activité A page 286

1. Soit $f(x) = 3e^{2x}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 2e^{2x} = 6e^{2x}$.
   Par conséquent : $f'(x) - 2f(x) = 6e^{2x} - 6e^{2x} = 0$ donc $\boxed{f' - 2f = 0}$.
2. Soit l'équation $y' = 4y - 6$.
   (a) $f(x) = 3e^{4x} + \dfrac{3}{2}$; $f'(x) = 12e^{4x}$ et $4f(x) - 6 = 12e^{4x} + 6 - 6 = 12e^{4x}$ donc $\boxed{f' = 4f - 6}$.
   f vérifie cette équation.
   (b) $g(x) = 4e^{x} - 6$
   $g'(x) = 4e^{x}$; $4g(x) - 6 = 16e^{x} - 24 - 6 = 16e^{x} - 30$ donc $\boxed{g' \neq 4g - 6}$; g ne vérifie pas cette équation.
   (c) $h(x) = 5e^{4x} + \dfrac{3}{2}$
   $h'(x) = 5 \times 4e^{4x} = 20e^{4x}$; $4h(x) - 6 = 20e^{4x} + 6 - 6 = 20e^{4x}$.
   $\boxed{h' = 4h - 6}$ donc h est solution de cette équation.

I Équations différentielles

Définition

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

Exemples :

1) Soit l'équation $y' = y$; une solution est la fonction exp.

2)

II Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \neq 0$

Définition

L'équation différentielle $y' = ay$ qui s'écrit aussi $y' - ay = 0$ où a et b sont des réels est appelée équation différentielle linéaire homogène de premier ordre à coefficients constants.

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\mathrm{e}^{ax}$, où k est un réel quelconque.
Pour tous réels x_0 et y_0, il existe une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$

Démonstration.

- Soient k un réel et y la fonction définie par $y = k\mathrm{e}^{ax}$.
  Alors $y'(x) = k \times a\mathrm{e}^{ax} = a \times y(x)$ donc $y' = ay$.
  y est bien une solution de cette équation (E)
- **Réciproquement** :
  Soit y une solution de (E) donc $y' = ay$.
  On considère la fonction g définie par $g(x) = y(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
  g est dérivable et $g'(x) = y'(x)\mathrm{e}^{-ax} + y(x) \times \left(-a\mathrm{e}^{-ax}\right) = ay(x)\mathrm{e}^{-ax} - ay(x)\mathrm{e}^{-ax} = 0$.
  Pour tout x, $g' = 0$ donc g est une fonction constante.
  Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $g = k$ donc $g(x) = k$ pour tout x.
  Or $g(x) = y(x)\mathrm{e}^{-ax}$, donc $y(x)\mathrm{e}^{-ax} = k$.
  On en déduit : $\boxed{y(x) = k\mathrm{e}^{ax}}$.

Propriété

Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E) et k un réel.
Alors $y_1 + y_2$ et ky_1 sont aussi solutions de (E).

III Résolution de $y' = ay + b$, $a \neq 0$

Définition

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ ou $y' - ay = b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Propriété

Les solutions de (E) : $y' = ay + b$ ou $y' - ay = b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

Remarque : les solutions s'obtiennent en ajoutant une solution particulière constante aux solutions de l'équation homogère $y' = ay$ associée.

Démonstration : Soit (E) l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($\neq 0$).

- On commence par chercher une fonction constante φ solution de cette équation.
  $\varphi(x) = k$; $\varphi'(x) = 0$ donc φ est solution. de (E)si, et seulement si, pour tout x, $0 = a\varphi(x) + b \Leftrightarrow 0 = ak + b$ donc $k = -\dfrac{b}{a}$.
- Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
  y est solution de (E) si, et seulement si, $y' = ay + b$ donc, pour tout x, $y(x) = ay(x) + b$.
  $y - \varphi$ est dérivable et $\left(y-\varphi\right)' = y' - \varphi' = (ay + b) - (a\varphi + b) = ay + b - a\varphi - b = a(y - \varphi)$.
  On. en déduit que $y - \varphi$ est sulution de l'équation différentielle (E_0) : $y' - ay = 0$.
  D'après le paragraphe précédent, on obtient : $(y - \varphi)(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ donc $y(x) = k\mathrm{e}^{ax} + \varphi(x)$, c'est-à-dire : $\boxed{y(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}}$.
- Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies par $\boxed{y(x) = k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a},\ k \in \mathbb{R}}$

Exemple : soit (E) : $y' = 3y - 2$.
$y' = ay + b$ avec $a = 3$ et $b = 2$.

Les solutions de cette équation. différentielle sont les fonctions : $\boxed{y \mapsto y(x) = k\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{2}{3}}$.

IV Équation différentielle $y' = f$

f est une fonction continue sur un intervalle I.

IV.1 Primitive d'une fonction continue

Définition

Soit F une fonction définie sur I. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.
On dit alors que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemples :

a Soit l'équation différentielle $y' = x^2$. (remarque, on commet un abus de langage, car x^2 est un nombre, pas une fonction).
Soit $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$; $F'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$ donc F est solution de l'équation différnetielle $y' = x^2$.

On peut remarque que $G_k(x) = F(x) = k$, où $k \in \mathbb{R}$, vérifie aussi $F' = x^2$, donc G_k est aussi une solution, quelle que soit la valeur de k, ce qui montre qu'il n'y a pas unicité d'une primitive.

b Soit l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$;

F définie par $F(x) = \ln x$ est solution de cette équation différentielle car $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Théorème

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- Soit F une primitive de f donc $F' = f$.
  Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante. $(F+k)' = F' + 0 = f$ donc $F + k$ est aussi une primitive de f.
- Soient F et G deux primitives de f sur I.
  Alors $F' = f$ et $G' = f$.
  $G - F$ est dérivable; $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$ donc $(G-F)' = 0$.
  $G - F$ est donc constant; $G - F = k$ d'où $G = F + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Propriété

On considère l'équation différentielle $y' = f$.
Soient x_0 et y_0 deux réels.
Il existe une unique solution de cette équation différentielle, donc une unique primitive F de f, telle que $F(x_0) = y_0$

Démonstration :

f est continue, donc admet une primitive F. Les autres primitives de f sont de la forme $F + k$.
On doit avoir $F(x_0) = y_0$ donc $k = y_0 - F(x_0)$; k est donc unique et la primitive aussi.

Exemple : soit $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$.

Une primitive de f est $F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$ car $F'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$.

Il y a une seule primitive G de f vérifiant $G(0) = -1$.

$G(x) = F(x) + k = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + k$; $G(0) = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$ donc $\boxed{G(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}$

IV.2 Primitives des fonctions usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions usuelles, on obtient les résultats suivants :

Fonction	une primitive	validité sur
$f(x) = a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
Hors-programme : $f(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x$	$\left](2k-1)\dfrac{\pi}{2};(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

IV.3 Primitives et opérations :

Soient u et v deux fonctions admettant des primitives respectives U et V sur un intervalle I et g une fonction admettant une primitive G sur un intervalle J contenant l'intervalle $u(I)$.
On note u' la dérivée de u.

Fonction	une primitive	validité
$f = \alpha u + \beta v ((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$	$F = \alpha U + \beta V$	I
$f = u' \times g \circ u$	$F = G \circ u$	I
$f = u' u^n (n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	I
$f = \dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	u ne s'annule pas sur I
$f = \dfrac{u'}{u^n},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$	$F = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$f = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$F = \sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$f = u' \mathrm{e}^u$	$F = \mathrm{e}^u$	
$f = u' \cos(u)$	$\sin(u)$	I
$f = u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	I

Cela vient des formules de dérivation.

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle $y' = \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ (E).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On remarque que $f(x) = x \times \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Posons $u(x) = x^2+1$; alors $u'(x) = 2x$.

On voit que $f = \dfrac{1}{2}u'(x) \times \dfrac{1}{u^2}$ dont une primitive est $F = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{u}\right)$.

Par conséquent : $F(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x^2+1} = \boxed{-\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)}}$

Exemple

Soit h la fonction définie par : $h(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-2x}+1$.

Montrer que H définie par $H(x) = \dfrac{1}{4}(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}+x$ est une primitive de h.

$$H'(x) = \frac{1}{4}\left[-2\mathrm{e}^{-2x}-2(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}\right]+1 = \frac{1}{4}\left[-2-2+4x\right]\mathrm{e}^{-2x}+1 = (x-1)\mathrm{e}^{-2x}+1 = h(x).$$

Pour tout x, $H'(x) = h(x)$ donc H est bien une primitive de h.

V Résolution de $y' = ay+f$, $a \neq 0$

Définition

L'équation différentielle (E) : $y' = ay+f$ ou $y'-ay = f$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Propriété

Soit φ une solution particulière de (E).

Alors y est une solution de (E)si, et seulement si, $y-\varphi$ est une solution de l'équation différentielle homogène associée $y' = ay$.

Exemple :

Soit l'équation différentielle $2y'+3y = 6x+1$.

On note φ une fonction affine qui est une solution particulière de (E).

À l'aide de φ, résoudre (E).

1. On pose $\varphi(x) = mx+p$ (fonction affine).

   φ est solution de (E)$\Leftrightarrow 2m+3(mx+p) = 6x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 6 \\ 2m+p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ p = -1 \end{cases}$.

   Òn en déduit $\varphi(x) = 2x-1$.

2. L'équation homogène associée est $2y'+3y = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{3}{2}y$.

   Les solutions sont $x \mapsto k\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

   Les solutions de l'équation (E) sont donc $\boxed{x \mapsto k\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}+2x-1}$