Spécialité mathématiques : contrôle (récurrence et suites)

I Démonstration par récurrence (2 points)

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Remarque : S_n est la somme des n premiers nombres impairs.

II (1,5 point)

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 6$.
Calculer u_5 et u_{30}.

III (2 points)

Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_6 = 112$ et $u_{14} = 56$.

1. Déterminer la raison r puis le terme initial u_0 de la suite.
2. La suite (u_n) est-elle croissante ? Décroissante ? Justifier.

IV (2 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$.

1. Calculer u_1 et u_2
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

V (2 points)

Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial $u_0 = 3$ et de raison $q = 1,1$.

On note : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Calculer S_{20}.

VI (5 points)

1. Une entreprise a fabriqué 20 000 objets d'un modèle α en 1999.
   Elle réduit progressivement cette production de 2 500 pièces par an jusqu'à ce que la production devienne nulle.
   On note u_0 la production du modèle α pour l'année 1999 et u_n la production du modèle α pour l'année $(1999 + n)$.
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (c) Exprimer u_n en fonction de n.
   (d) Déterminer le nombre **total** d'objets de modèle α qui auront été produits du 1er janvier 1999 au 31 décembre 2007.
2. Dès 1999, cette entreprise lance un nouveau modèle β. 11 000 objets du modèle β ont été produits en 1999.
   La production du modèle β augmente de 8 % chaque année.
   On note v_0 la production du modèle β pour l'année 1999 et v_n la production du modèle β pour l'année $(1999 + n)$. Les résultats numériques seront arrondis à l'unité près.
   (a) Vérifier que $v_1 = 11\,880$ et calculer v_2.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) Calculer la production de l'année 2007.
   (e) Déterminer le nombre **total** d'objets de modèle β qui auront été produits du 1er janvier 1999 au 31 décembre 2007.

VII (5,5 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3, et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n + 3$.
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.
   (c) En déduire une validation de la conjecture précédente. (utiliser a))
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
   Exprimer S_n en fonction de n.