

Spé maths : DM n° 1

« Tout l'univers repose sur l'ensemble des entiers naturels. »
(Pythagore (569 avant J.C. - vers 500 avant J.C.))

I

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- $9x^2 + 4x + 5 = 0$
- $2x^2 + 28x = 15$
- $x^2 + 2x + 3 < 0$
- $x^2 + x - 1 \leq 0$
- $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

II

(u_n) est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $u_3 = 5$.
Trouver la valeur de u_0 et de u_{24} .

III

[a] (u_n) est une suite géométrique de raison q et telle que $u_2 = 54$ et $u_4 = 162$.

- Y a-t-il plusieurs valeurs possibles pour q ?
- Calculer u_0 .

IV

(u_n) est la suite arithmétique de raison 6 telle que $u_0 = 7$.
 (v_n) est la suite définie pour tout nombre n de \mathbb{N} , par $v_n = 5u_n - 1$.
Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

V

(u_n) est la suite de nombres réels strictement positifs définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

(v_n) est la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

- Démontrer, par récurrence, que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
Expliquer alors pourquoi les termes u_n sont définis pour tout n .
- Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 puis v_1, v_2, v_3, v_4 .
- Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
- Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$, exprimer :
 - v_n en fonction de n ;
 - u_n en fonction de n .

VI Évaporation

En période de sécheresse, une piscine perd chaque semaine un vingtième de son contenu par évaporation. En début de période, elle contient 60 m^3 d'eau. On suppose que la sécheresse dure 8 semaines et que l'on n'ajoute pas d'eau.

On note $V_0 = 60$ le volume de départ puis V_1, V_2, \dots, V_n les volumes d'eau de la piscine au bout respectivement, d'une semaine, de deux semaines, ..., de n semaines.

- Calculer V_1 et V_2 .
- Comment calcule-t-on V_{n+1} à partir de V_n ?
- Quelle est la nature de la suite (V_n) ?
- Quel sera le volume d'eau dans la piscine à la fin de la huitième semaine?