Spécialité mathématiques : correction du contrôle (récurrence et suites)

I Démonstration par récurrence (2 points)

Soit $P(n)$ la propriété : $n \geqslant 1$, $S_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.
Démontrons-la par récurrence.

- **Initialisation** : pour $n=1$, $S_1 = 1$ car S_1 ne contient qu'un seul terme et $n^2 = 1^2 = 1 = S_1$ donc $P(1)$est vraie.
- **Hérédité** : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier n quelconque.
  donc $S_n = 1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$.
  Alors : $S_{n+1} = 1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = S_n + (2n+1) = n^2+2n+1 = (2n+1)^2$ (identité remarquable) donc $P(n+1)$ est vraie.
  La propriété est **héréditaire**.

D'après l'axiome de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

II (1,5 point)

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 6$.

- $u_5 = u_0 + 5r = 4+5\times 6 = 34$; $\boxed{u_5 = 34}$
- $u_{30} = u_0 + 30r = 4+30\times 6 = 184$; $\boxed{u_{30} = 184}$

III (2 points)

Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_6 = 112$ et $u_{14} = 56$.

1. $u_{14} = u_6 + (14-6)r = u_6 + 8r$ donc $r = \dfrac{u_{14}-u_6}{8} = \dfrac{56-112}{8} = -\dfrac{56}{8} = -7$; $\boxed{r=-7}$.
   $u_6 = u_0 + 6r$ donc $u_0 = u_6 - 6r = 112 - 6\times(-7) = 112+42 = 154$; $\boxed{u_0 = 154}$
2. $r = -7 < 0$ donc la suite est décroissante. (c'est du cours)

IV (2 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\mathbf{n}+1} = u_{\mathbf{n}} + \mathbf{n}^2 + 1$.
Le terme n qu'on a dans u_{n+1} est le même que ceui dans u_n et dans n^2 !

1. - $u_1 = u_0 + 0^2 + 1 = 1^2 + 0 + 1 = \boxed{2}$
   - $u_2 = u_1 + 1^2 + 1 = 2+1+1 = \boxed{4}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = n^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
   On ne peut pas se contenter de regarder les premiers termes !
   Par exemple, $u_n = n(n-1)(n-2)(n-3)$ vaut 0 pour $n=0$, $n=1$, $n=2$ et $n=3$; on ne peut pas en déduire que la suite est constante et vaut 0 pour tout n !

V (2 points)

Soit (u_n) la suite géométrique de terme initial $u_0 = 3$ et de raison $q = 1,1$.
On note : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.
D'après le cours, $S_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 3 \times \dfrac{1^{21}-1,1}{1,1-1} = \boxed{30\left(1,1^{21}-1\right)}$.
Remarque : il n'était pas demandé de valeur approchée ; si on veut une valeur approchée, il faut effectuer le caccul à la machine en une seule fois ! On trouve $S_{20} \approx 192{,}007\,498\,328$

VI bac ES centres étrangers juin 2000 (5 points)

1. Une entreprise a fabriqué 20 000 objets d'un modèle α en 1999.
   Elle réduit progressivement cette production de 2 500 pièces par an jusqu'à ce que la production devienne nulle.
   On note u_0 la production du modèle α pour l'année 1999 et u_n la production du modèle α pour l'année (1999 + n).
   (a) - $u_1 = u_0 - 2500 = 20000 - 2500 = \boxed{17500}$.

- $u_2 = u_1 - 2500 = 17500 - 2500 = \boxed{15000}$.

(b) Pour tout n, $\boxed{u_{n+1} = u_n - 2500}$. La suite (u_n) est arithmétique, de raison $\boxed{r = 2500}$ et de premier terme $\boxed{u_0 = 20000}$.

(c) Pour tout n, $u_n = u_0 + nr = \boxed{20000 - 2500n}$.

(d) 2007 correspond à $n = 8$.

Le nombre total d'objets fabriqués est $u_0 + u_1 + \cdots + u_8 = \dfrac{9(u_0 + u_8)}{2}$.

$u_8 = 20000 - 8 \times 2500 = 20000 - 20000 = 0$.

Alors : $\dfrac{9(u_0 + u_8)}{2} = \dfrac{9 \times 20000}{2} = 9 \times 10000 = \boxed{90000}$.

2. Dès 1999, cette entreprise lance un nouveau modèle β. 11 000 objets du modèle β ont été produits en 1999.
La production du modèle β augmente de 8 % chaque année.
On note v_0 la production du modèle β pour l'année 1999 et v_n la production du modèle β pour l'année $(1999 + n)$. Les résultats numériques seront arrondis à l'unité près.

(a) La production augmente de 8 % par an, donc est multipliée par $1 + 8\,\% = 1 + \dfrac{8}{100} = 1{,}08$.

Alors :

- $v_1 = 1{,}08 v_0 = 1{,}08 \times 11000 = \boxed{11880}$.
- $v_2 = 1{,}08 v_1 = 12830{,}4 \approx \boxed{12830}$.

(b) Pour tout n, $\boxed{v_{n+1} = 1{,}08 v_n}$.

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique, de raison $\boxed{q = 1{,}08}$ et de premier terme $\boxed{v_0 = 11000}$

(c) Puisque $(_n)$ est géométrique, on a, pour tout n : $v_n = v_0 q^n = \boxed{11000 \times 1{,}08^n}$.

(d) La production en 2007 est $v_8 = 11000 \times 1{,}08^8 \approx \boxed{20360}$.

(e) Le nombre **total** d'objets de modèle β qui auront été produits du 1er janvier 1999 au 31 décembre 2007 est :

$v_0 + v_1 + \cdots + v_8 = v_0 \times \dfrac{q^8 - 1}{q - 1} = 11000 \times \dfrac{1{,}08^9 - 1}{1{,}08 - 1} \approx \boxed{137363}$.

VII Bac S : Métropole juin 2013 (5,5 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$.

1. (a) On calcule les premiers termes, par exemple en utilisant le mode récurrence de la calculatrice, et on obtient :

$u_1 = 2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3} \approx \boxed{2{,}33}$ $\quad u_2 = 2 + \dfrac{8}{9} = \dfrac{26}{9} \approx \boxed{2{,}89}$

$u_3 = 3 + \dfrac{16}{27} = \dfrac{97}{27} \approx \boxed{3{,}59}$ $\quad u_4 = 4 + \dfrac{32}{81} = \dfrac{356}{81} \approx \boxed{4{,}40}$

(b) On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante. On pourra en tout cas affirmer qu'elle n'est pas décroissante.

2. (a) Nous allons procéder par récurrence :

Identification de la propriété : Pour tout entier naturel n, posons la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante : $\boxed{u_n \leqslant n + 3}$.

Initialisation : Puisque l'on a $u_0 = 2$ et $0 + 3 = 3$, on vérifie bien :

$u_0 \leqslant 0 + 3$: *la propriété $\mathscr{P}_0$ est bien vraie.*

Hérédité : Pour un entier k naturel donné, on suppose la propriété $\mathscr{P}_k$ vraie.

On a $u_{k+1} = \dfrac{2}{3}u_k + \dfrac{1}{3}k + 1$.

Par hypothèse de récurrence : $u_k \leqslant k + 3$

En multipliant par un nombre positif : $\dfrac{2}{3}u_k \leqslant \dfrac{2}{3}(k + 3)$

Soit $\dfrac{2}{3}u_k \leqslant \dfrac{2}{3}k + 2$

Puis, en ajoutant un même nombre dans chaque membre :

$\dfrac{2}{3}u_k + \dfrac{1}{3}k + 1 \leqslant \dfrac{2}{3}k + 2 + \dfrac{1}{3}k + 1$

Ce qui donne : $u_{k+1} \leqslant k + 3 \leqslant k + 4$. Donc on a donc $\boxed{u_{k+1} \leqslant (k + 1) + 3}$, c'est à dire que la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

Nous avons donc démontré le caractère héréditaire de la véracité des propriétés $\mathscr{P}_n$.

Conclusion : Puisque la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie et que nous avons prouvé l'hérédité, on peut en déduire que pour tout entier naturel n, on a $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est à dire que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \leqslant n + 3$.

(b) $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+\frac{3}{3}$

On a donc bien $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}\times(-u_n+n+3)=\boxed{\frac{1}{3}(n+3-u_n)}$.

Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leqslant n+3$ ce qui équivaut à dire que la différence $n+3-u_n$ est positive, et elle le reste en étant multipliée par $\frac{1}{3}$, donc la différence entre deux termes consécutifs étant positive, on confirme bien que notre conjecture était correcte : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante, dès le rang 0.

Remarque : on ne peut pas se baser que sur les premiers termes; il faut montrer que $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour toutes les valeurs de n.

3. (a) Exprimons, pour un entier n naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de v_n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}(u_n-n)$

Donc $\boxed{v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n}$.

La relation de récurrence obtenue confirme que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien **géométrique** de raison $q=\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0=u_0-0=2$.

(b) On peut donc en déduire une expression explicite du terme général de la suite v : $v_n=v_0\times q^n=\boxed{2\left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

Enfin, puisque l'on a, pour tout n, $v_n=u_n-n$, on en déduit :

$u_n=v_n+n$, et donc on aboutit bien à l'expression demandée :

$\boxed{u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n}$.

4. (a) $S_n=u_0+U_1+\cdots+u_n=(v_0+0)+(v_1+1)+(v_2+2)+\cdots+(v_n+n)=(u_0+u_1+\cdots+n)+(1+2+\cdots+n)$.

La première sous-somme est une somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc :

$$v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=2\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)}=6\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

La seconde sous-somme est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels, c'est à dire la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, donc elle vaut :

$\frac{0+n}{2}\times(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}$ (résultat classique).

Finalement, on a $\boxed{S_n=6\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{n(n+1)}{2}}$.