Spécialité :correction du devoir sur feuille n° 2

I

Une personne loue un local à partir du 1er janvier 2007. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial (c'est-à-dire le loyer payé en 2007) est 24 000 € et le locataire s'engage à occuper le local pendant neuf années complètes.

1. **Contrat 1** : Le loyer annuel augmente de 4 % par an. On note u_0 le loyer payé la première année, c'est-à-dire le loyer payé en 2007 et u_n le loyer payé en l'année $(2007+n)$.
   Le loyer annuel augmente de 4 % par an.

   (a) • Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 4 % est $C = 1 + \dfrac{4}{100} = 1{,}04$ donc $u_1 = 1{,}04u_0 = \boxed{24\,960\text{ €}}$.
   • Autre méthode (équivalente) : $u_1 = u_0 + \dfrac{4}{100}u_0 = 24\,000 + \dfrac{4}{100} \times 24\,000 = \boxed{24\,960\text{ €}}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = 1{,}04u_n}$ donc la suite (u_n) est géométrique, de raison $\boxed{q = 1{,}04}$ et de premier terme $\boxed{u_0 = 24\,000}$.

   (c) Puisque (u_n) est géométrique, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 q^n$ donc $\boxed{u_n = 24\,000 \times 1{,}04^n}$.
   On obtient alors $u_8 = 24\,000 \times 1{,}04^8 \approx 32\,845{,}66$.

   (d) Notons S_n la somme payée au bout de n année de contrat.
   $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$.
   La somme payée au bout de 9 années de contrat est $S_8 = 24\,000 \times \dfrac{1{,}04^9 - 1}{1{,}04 - 1} \approx \boxed{253\,987{,}09\text{ €}}$.

   (e) À la calculatrice, on trouve que $u_n \geqslant 36\,000$ pour $\boxed{n \geqslant 11}$, donc à partir de la 12e année.

2. **Contrat 2** : Le loyer annuel augmente de 1 500 € par an.
   On note v_0 le loyer payé la première année, c'est-à-dire le loyer payé en 2007 et v_n le loyer payé en l'année $(2007+n)$.
   Le loyer annuel augmente de 1 500 € par an.

   (a) $v_1 = 24\,000 + 1\,500 = 25\,500$ € la 2e année.

   (b) Pour tout n, $v_{n+1} = v_n + 1\,500$ donc (v_n) est une suite arithmétique, de raison $\boxed{r = 1\,500}$ et de premier terme $\boxed{v_0 = 24\,000}$.

   (c) On en déduit : $v_n = v_0 + nr$ donc $v_8 = 24\,000 + 8 \times 1\,500 = \boxed{36\,000}$.

   (d) Notons S'_n la somme payée au bout de n anées ; $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = (n+1) \times \dfrac{v_0 + v_n}{2}$.
   Par conséquent : La somme payée au bout de 8 années est :
   $S'_8 = 9 \times \dfrac{24\,000 + 36\,000}{2} = \boxed{270\,000\text{ €}}$.

   (e) On résout $v_n = 2v_0 \Leftrightarrow v_0 + nr = 2v_0 \Leftrightarrow nr = v_0 \Leftrightarrow n = \dfrac{v_0}{r} = \dfrac{24\,000}{1\,500} = \boxed{16}$.
   Le loyer double au bout la dix-septième année.

3. **Bilan** : Pour 9 années, on voit que le contrat n° 1 est plus avantageux.
   À la calculatrice, on voit que $u_n < v_n$ jusqu'à $n = 22$, mais que $u_n > v_n$ pour $n \geqslant 23$.

II

Soit la suite numérique (u_n) définie sur **N** par :
$u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. (a) • $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + 0 + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \boxed{\frac{7}{3} \approx 2{,}33}$.

• $u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + \frac{4}{3} = \frac{14}{9} + \frac{12}{9} = \boxed{\frac{26}{9} \approx 2;89}$.

• $u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{26}{9} + \frac{2}{3} + 1 = \boxed{\frac{97}{27} \approx 3{,}59}$

• $u_4 = \frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3} \times 3 + 1 = \frac{2}{3} \times \frac{97}{27} + 2 = \frac{194}{81} + 2 = \boxed{\frac{356}{81} \approx 4{,}40}$

(b) Il semble que cette suite soit croissante.

2. (a) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $u_n \leqslant n+3$ ».
Effectuons une démonstration par récurrence :

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $n + 3 = 3$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

• **Hérédité** : on suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier n quelconque, donc $\boxed{u_n \leqslant n+3}$ (hypothèse de récurrence).
$u_n \leqslant n+3 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leqslant \frac{2}{3}(n+3) \Rightarrow \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leqslant \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1 = n + 3 \leqslant n + 4 = (n+1) + 3$.
Par conséquent : $\boxed{u_{n+1} \leqslant (n+1)+3}$.

La propriété est héréditaire.
D'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout n.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \boxed{\frac{1}{3}(n + 3 - u_n)}$.

(c) Comme $u_n \geqslant n+3$, $n + 3 - u_n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et la suite (u_n) est bien **croissante**.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur **N** par $v_n = u_n - n$.

(a) Pour tout n, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$, donc $\boxed{v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n}$.

(v_n) est donc une suite géométrique, de raison $\boxed{q = \frac{2}{3}}$ et de raison $\boxed{v_0 = u_0 - 0 = 2}$

(b) On en déduit : $v_n = v_0 q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$v_n = u_n - n$ dpnc $u_n = v_n + n$ d'où : $\boxed{u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n}$

(c) $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

(a) S_n est la somme de $n+1$ termes de la suite u_n. Mais, comme par ailleurs, on peut considérer que chaque terme u_n est la somme de v_n et de n, donc en réordonnant les termes, S_n est la somme de deux « sous-sommes » : celle des $n+1$ premiers termes de la suite v et celle des $n+1$ premier entiers naturels.
La première sous-somme est une somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc :

$$v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

La seconde sous-somme est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels, c'est à dire la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, donc elle vaut : $\frac{0+n}{2} \times (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$ (résultat classique).
Finalement, on a $\boxed{S_n = 6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}$.

(b) On en déduit : $T_n = \dfrac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Puisque, une fois encore, q est entre -1 et 1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.

Donc par limite d'une somme de suites, puis d'un produit de suites : $\lim\limits_{n\to+\infty} 6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc par limite d'un quotient de suites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, et donc finalement, par limite d'une somme de suites, on arrive à conclure que la suite T converge vers $\boxed{\frac{1}{2}}$.

III

1. $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

$k \geqslant k-1$ donc, en multipliant par $k > 0$, $k^2 \geqslant k(k-1)$ et en prenant les inverses, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$ d'où :

$\boxed{\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a
$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} = \leqslant \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n}$ après simplification.
Or $1-\frac{1}{n} \leqslant n$ d'où : $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leqslant 1$.

3. Soit $u_n = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} = \sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k^2}$.
Il est évident que la suite (u_n) est croissante puisque $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$.
(u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle est convergente vers un réel $\ell \leqslant 1$.
Remarque : sa limite ℓ, non évidente, vaut $\boxed{\ell = \frac{\pi^2}{6}-1}$. (non démontrable en Terminale)

IV

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

1. $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v(x) = x+1 \end{cases}$.
$f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.
Par conséquent : $f'(x) = \frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{xe^x}{(x+1)^2}}$.

2. $f'(x)$ est du signe de x puisque $e^x > 0$. Donc $f'(x) < 0$ sur $]-1\,;\,0[$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.
Tableau de variation :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	1	↗	

Le minimum de f sur $]-1\,;\,=\infty[$ est $f(0) = 1$ donc $\boxed{f(x) \geqslant 1}$ pour tout $x > -1$

V

A. Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,30]$ par :

$$f(x) = 0,4x+1+e^{-0,4x+1}.$$

1. $f = u + e^v$ avec $\begin{cases} u(x) = 0,4x+1 \\ v(x) = -0,4x+1 \end{cases}$.
$f' = u' + \left(e^v\right)' = u' + v'e^v$ avec $\begin{cases} u'(x) = 0,4 \\ v'(x) = -0,4 \end{cases}$.
Alors : $f'(x) = 0,4-0,4e^{-0,4x+1} = \boxed{0,4\left(1-e^{-0,4x+1}\right)}$

2. $1-\mathrm{e}^{-04x+1}>0 \Leftrightarrow 1>\mathrm{e}^{-04x+1} \Leftrightarrow 1>\mathrm{e}^{-04x+1} \Leftrightarrow 0>-0,4x+1$ (car la foonction exp est croissante).
On en déduit : $-1>-0,4x \Leftrightarrow \dfrac{1}{0,4}<x \Leftrightarrow x>\dfrac{5}{2}$;
‘ Par conséquent : $\boxed{\mathscr{S}=\left]\dfrac{5}{2}\,;\,30\right]}$

3. $f'(x)$ est du signe de $1-\mathrm{e}^{-0,4x+1}$ donc $f'(x)>0$ sur $\left]\dfrac{5}{2}\,;\,30\right]$, nul en $\dfrac{5}{2}$ et $f'(x)<0$ sur $\left[0\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$.
$f(0)=1+\mathrm{e}\approx \boxed{3,72}$ et $\boxed{f(30)\approx 30}$.
Tableau de variation :

x	0		$\frac{5}{2}$		30
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$1+\mathrm{e}\approx 3,72$	↗	

B. Application économique

Une entreprise fabrique des paquets de cartes à l'effigie de joueurs de football. On note x le nombre de paquets fabriqués, en centaine, avec $0 \leqslant x \leqslant 30$, et on suppose que le coût de fabrication est égal, en centaine d'euros, à $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. • Le coût de fabrication de 100 paquets est $f(1)=\dfrac{7}{5}+\mathrm{e}^{\frac{3}{5}}\approx 3,22$, soit environ 322 €.
   • Le coût de fabrication de 2 000 paquets est $f(20)=9+\mathrm{e}^{-7}\approx 9$, soit environ 900 €.
2. On suppose que chaque paquet est vendu 2 €.
   (a) Soit x dans $[0\,;30]$. $B(x)=2x-f(x)=2x-\left(0,4x+1+\mathrm{e}^{-0,4x+1}\right)=1,6x-1-\mathrm{e}^{-0,4x+1}$.
   (b) $f'(x)=1,6+0,4\mathrm{e}^{-0,4x+1}>0$ pour tout $x\in[0\,;\,30]$.
   B est donc croissante.
   (c) $B(x)=0$ pour $x\approx 1,6161$, donc le bénéfice est positif à partir de 1616 paquets.